# LỜI NÓI ĐẦU

Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức là cơ quan báo chí hoạt động theo Giấy phép số 125/GP-BTTTT, ngày 10 tháng 4 năm 2014 của Bộ Thông tin và Truyền thông. Tạp chí đã được Trung tâm Thông tin Khoa học và Công nghệ Quốc gia cấp mã số chuẩn quốc tế ISSN 1859-2759 theo công văn số 69/TTKHCN-ISSN ngày 05 tháng 03 năm 2009.

Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức là nơi phản ánh hoạt động giáo dục, đào tạo; Công bố các tác phẩm, công trình nghiên cứu khoa học của cán bộ, giảng viên, học viên, các nhà khoa học trong và ngoài trường; Tuyên truyền phổ biến các chủ trương đường lối, chính sách của Đảng và Nhà nước về công tác giáo dục, đào tạo; Giới thiệu, trao đổi các kết quả nghiên cứu, ứng dụng các thành tựu khoa học và công nghệ trong nước và quốc tế.

Hội đồng biên tập rất mong nhận được sự cộng tác nhiệt tình của đông đảo cán bộ giảng viên, cán bộ nghiên cứu, các nhà khoa học trong và ngoài trường để Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức mang đến độc giả những kết quả, thông tin hữu ích có giá trị khoa học.

**HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP**

**TẠP CHÍ KHOA HỌC**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC HỒNG ĐỨC**
**SỐ 35 (10 - 2017)**

# MỤC LỤC


| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *Doãn Thanh Cảnh* | Mô phỏng và đánh giá ổn định động của hệ thống điện nhiều máy phát | 5 |
| 2 | *Lê Đình Chắc*<br>*Nguyễn Thị Hiền* | Phương pháp phân lập và đọc trình tự gen ITS loài Lan kim tuyến (*Anoectochilus Setaceus* Blume.) tại Thanh Hóa | 11 |
| 3 | *Nguyễn Mạnh Cường*<br>*Mai Xuân Thảo* | Khôi phục xấp xỉ hàm trong không gian Besov bằng B-splines | 24 |
| 4 | *Trịnh Đình Định*<br>*Trần Thị Huyền*<br>*Tống Văn Giang*<br>*Trần Thị Thảo*<br>*Nguyễn Đức Minh*<br>*Trịnh Lan Hồng* | Tổng hợp vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ và thử nghiệm xử lý chất thải chứa dẫn xuất halogen | 36 |
| 5 | *Phạm Thị Bích Hà*<br>*Lê Xuân Dũng* | Bất biến của giới hạn thuận qua phép lấy thương | 44 |
| 6 | *Lê Văn Hiểu*<br>*Trần Thị Hải* | Nghiên cứu các cơ chế tán xạ chủ đạo ảnh hưởng đến độ linh động của hạt tải trong giếng lượng tử pha tạp hai phía | 53 |
| 7 | *Đinh Huy Hoàng*<br>*Đỗ Thị Thủy* | Một vài kết quả về điểm bất động trong không gian *B*-mêtric | 62 |
| 8 | *Trịnh Thị Hồng* | Nghiên cứu ảnh hưởng một số yếu tố đến quá trình sinh tổng hợp chitinase của chủng nấm *Metarhizium* sp. được phân lập từ xác côn trùng tại Thanh Hóa | 73 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | *Mai Thị Hồng*<br>*Ngô Sĩ Huy* | Đánh giá các thông số kỹ thuật của một số loại thép xây dựng trên thị trường | 80 |
| 10 | *Lê Quang Huy*<br>*Hoàng Thị Minh Nhàn* | Một số tính chất mở rộng của căn iđêan | 88 |
| 11 | *Nguyễn Thị Nga*<br>*Phạm Chí Công* | Một số tính chất co rút tuyệt đối, co rút lân cận tuyệt đối trong lớp các không gian metric compact | 94 |
| 12 | *Nguyễn Tuấn Phương*<br>*Lê Viết Báu* | Ảnh hưởng của việc thay thế Mg cho Sr lên tính chất từ của $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$ | 101 |
| 13 | *Nguyễn Hữu Quang*<br>*Đỗ Thị Tuyết*<br>*Lê Thị Thanh Hà* | Một số tính chất đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính trên đại số | 108 |
| 14 | *Lê Văn Quang* | Vai trò cảm biến trong mạng vạn vật | 116 |
| 15 | *Lê Thị Thanh Tâm*<br>*Mai Thị Ngọc Hằng*<br>*Mai Thị Hồng*<br>*Nguyễn Thị Mùi* | Ảnh hưởng của kích cỡ cốt liệu và hàm lượng nước đến cường độ nén và độ lưu động của bê tông | 121 |
| 16 | *Hoàng Văn Thi*<br>*Nguyễn Tiến Đà* | Toán tử ban đầu và khai triển Taylor-Gontcharov | 129 |
| 17 | *Hoàng Thị Hương Thủy*<br>*Vũ Hồng Nam* | Lựa chọn nồng độ axit axetic thích hợp cho dung dịch thụ động Cr(III) | 139 |
| 18 | *Nguyễn Quyết Tiến*<br>*Trần Thị Hải* | Nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng lên tính chất điện của hạt tải trong mô hình giếng lượng tử pha tạp một phía | 146 |
| 19 | *Lê Trần Tình*<br>*Mai Xuân Thảo*<br>*Nguyễn Thị Sâm* | Dáng điệu tiệm cận nghiệm đối với một lớp phương trình Parabolic không địa phương | 155 |

# MÔ PHỎNG VÀ ĐÁNH GIÁ ỔN ĐỊNH ĐỘNG CỦA HỆ THỐNG ĐIỆN NHIỀU MÁY PHÁT

**Doãn Thanh Cảnh**[1]

TÓM TẮT

*Bài báo trình bày phương pháp đánh giá ổn định động thông qua mô phỏng và phương pháp xác định thời gian cắt tới hạn dựa trên lặp liên tiếp và giảm bước tìm kiếm trong mỗi bước lặp. Phương pháp này được kiểm chứng qua các hệ thống điện mẫu IEEE 9 nút và hệ thống điện mẫu 39 nút. Kết quả mô phỏng cho thấy, chương trình tính thời gian cắt tới hạn (CCT - Critical Clearing Time) cho phép xác định CCT một cách tương đối hiệu quả, là cơ sở tin cậy để đánh giá ổn định động của hệ thống điện.*

**Từ khóa:** *Hệ thống điện, ổn định động, thời gian cắt tới hạn.*

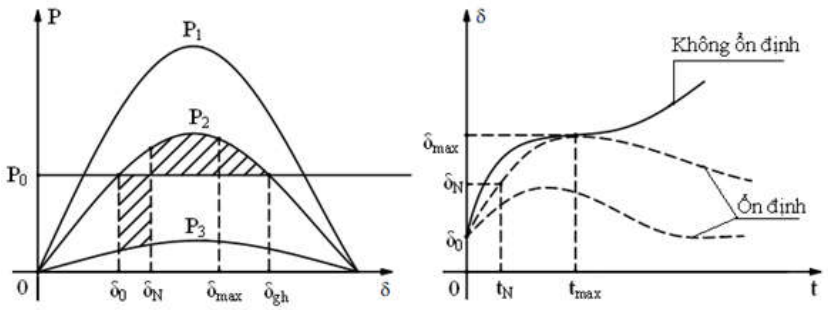
## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Một trong những mục tiêu của hệ thống điện (HTĐ) là cung cấp điện liên tục và tin cậy tới khách hàng. Độ tin cậy của hệ thống điện phụ thuộc vào khả năng chịu đựng các sự cố như ngắn mạch hoặc bị mất các phần tử quan trọng như đường dây, trạm biến áp dẫn đến thay đổi chế độ làm việc. Các hệ thống điện hiện nay đã có những bước phát triển nhảy vọt về công suất cũng như quy mô lãnh thổ [4]. Tuy nhiên, do quy mô lãnh thổ rộng lớn, các hệ thống điện khó tránh khỏi các sự cố. Đơn cử như sự cố mất điện miền Nam Việt Nam diễn ra ngày 22 tháng 5 năm 2013 gây thiệt hại nặng về kinh tế với hơn 8 triệu khách hàng bị ảnh hưởng là một minh chứng rõ nét. Qua sự cố này cho thấy tầm quan trọng của việc phân tích ổn định và an toàn trong công tác vận hành hệ thống điện. Bên cạnh đó, để thị trường điện tiến dần đến một thị trường mở và cạnh tranh thì việc duy trì ổn định hệ thống điện có ý nghĩa rất quan trọng và phải được đặc biệt quan tâm. Bài viết này giới thiệu một phương pháp hiệu quả để đánh giá ổn định động của hệ thống điện đó là: ứng dụng chương trình tính thời gian cắt tới hạn kết hợp mô phỏng đánh giá ổn định động của hệ thống điện.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Trên lý thuyết, ổn định động của hệ thống là khả năng của hệ thống duy trì chế độ quay đồng bộ các máy phát sau những kích động lớn. Sau các sự cố ngắn mạch, quá trình chuyển động các máy phát có đồng bộ hay không đồng bộ thường được thể hiện rõ trong khoảng 2 - 3 giây, có khi chỉ trong vài chu kỳ đầu sau khi sự cố được giải trừ [7]. Thực tế cho thấy rằng nếu các máy phát mất đồng bộ từ chu kỳ đầu tiên của quá trình quá độ, thì xem như hệ thống đã mất ổn định.

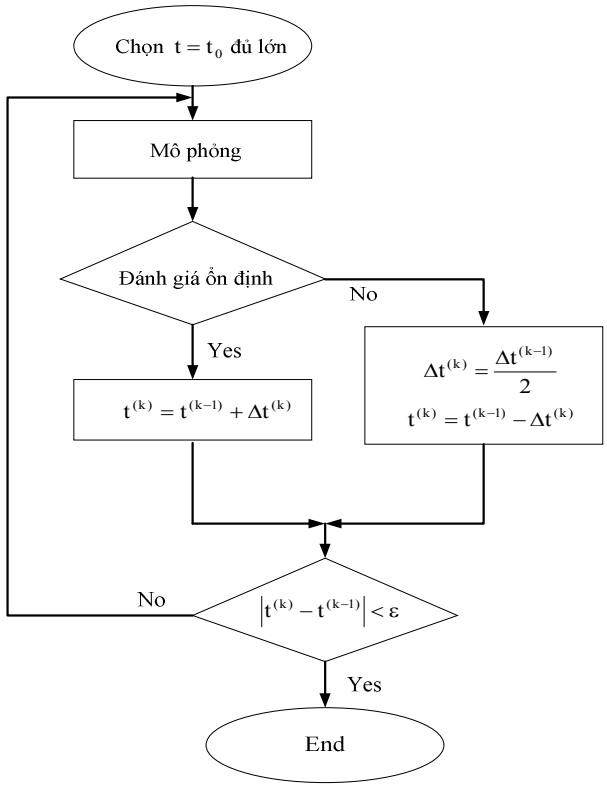
[1] *Giảng viên khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức*




**Hình 1. Đánh giá ổn định động hệ thống điện**

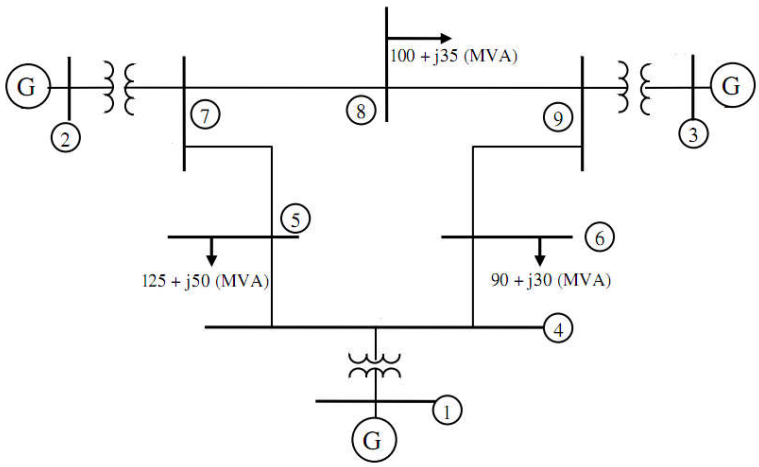
Việc tính toán ổn định động nhằm mục đích tìm được thời gian cắt tới hạn để chỉnh định rơle bảo vệ. Thời gian cắt tới hạn là thời gian nếu rơle bảo vệ cắt ngắn mạch sớm hơn nó thì hệ thống sẽ ổn định động [1].

Có nhiều phương pháp được sử dụng để đánh giá ổn định động của hệ thống điện [1,4,6], tuy nhiên giới hạn trong bài viết này tác giả sử dụng mô phỏng bằng phần mềm MATLAB kết hợp chương trình tính thời gian cắt tới hạn để đánh giá ổn định động. Các kết luận được đưa ra khi so sánh góc rotor của máy phát với tâm quán tính COI (*Center Of Inertia*). Giới hạn trong bài viết này tác giả sử dụng phương pháp chia đôi để tìm thời gian cắt tới hạn CCT với lưu đồ thuật toán cho như hình 2 [2].

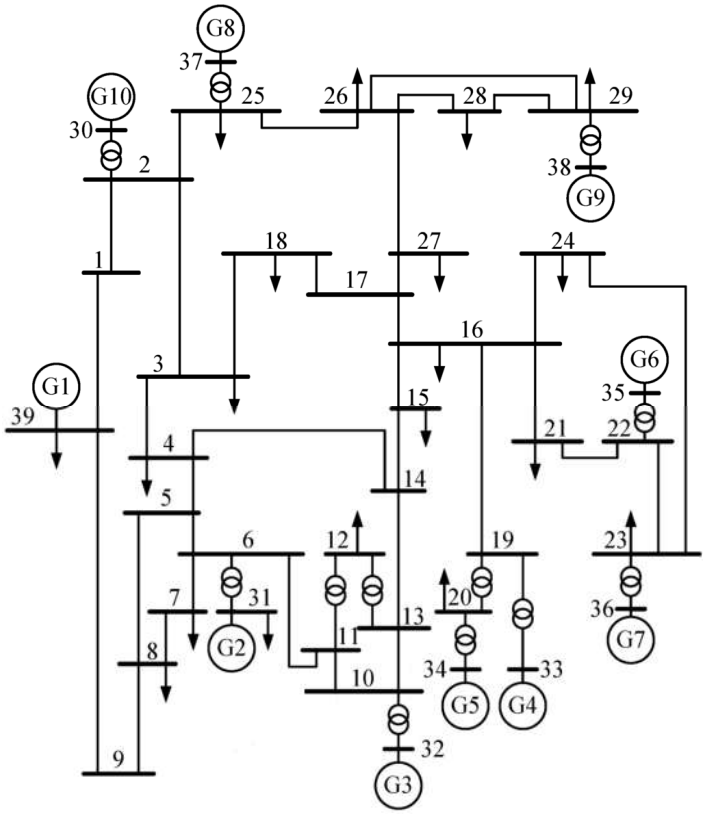



**Hình 2. Sơ đồ khối tính thời gian cắt tới hạn**

Để tiến hành đánh giá ổn định của các hệ thống điện mẫu lần lượt thực hiện với kịch bản sự cố ngắn mạch 3 pha tại đầu cực các máy phát và sử dụng phần mềm MATLAB/MATPOWER [7] và MATDYN [5] để mô phỏng đánh giá ổn định động cho hệ thống điện mẫu IEEE 9 nút (3 máy phát) và IEEE 39 nút (10 máy phát). Thời gian kéo dài sự cố là 0,33s và thời gian giải trừ sự cố là 0,35s.



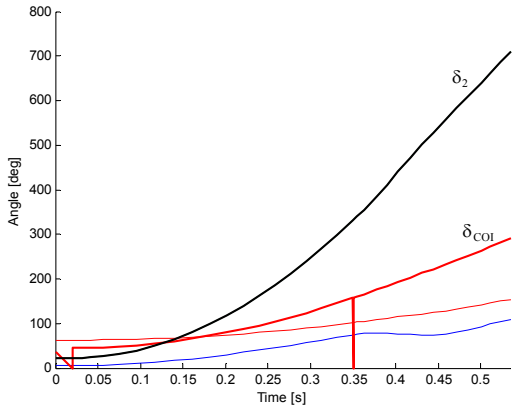

**Hình 3. Sơ đồ lưới điện IEEE 9 nút**



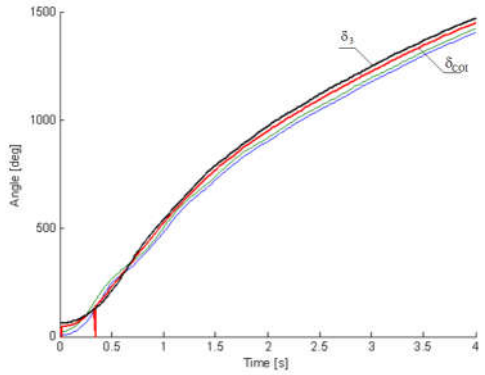

**Hình 4. Sơ đồ lưới điện IEEE 39 nút**

Các kết quả được thể hiện trên các hình 5 đến hình 8.

Các kết quả tính toán cho hệ thống điện 3 máy phát:

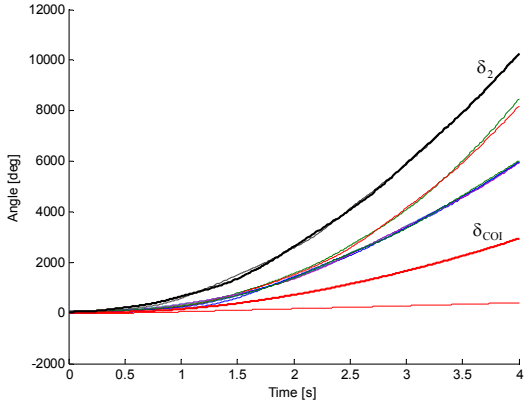



**Hình 5. Quan hệ giữa góc rotor máy phát và thời gian khi máy phát số 2 sự cố**

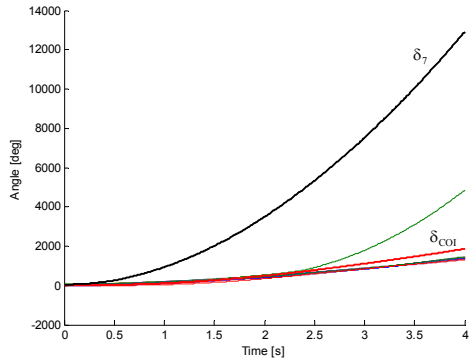



**Hình 6. Quan hệ giữa góc rotor máy phát và thời gian khi máy phát số 3 sự cố**

Các kết quả tính toán cho hệ thống 10 máy phát:




**Hình 7. Quan hệ giữa góc rotor máy phát và thời gian khi máy phát số 6 sự cố**




**Hình 8. Quan hệ giữa góc rotor máy phát và thời gian khi máy phát số 7 sự cố**

Các kết quả mô phỏng của lưới 3 máy phát và lưới 9 máy phát cho thấy, với thời gian cắt lựa chọn ban đầu là 0,33s thì hầu hết các sự cố được xét đều dẫn đến mất ổn định góc lệch (máy số 2 - với hệ thống 3 máy phát; máy số 2,7,8,9 - với hệ thống 10 máy phát). Vì vậy, có thể sử dụng giá trị này làm giá trị ban đầu cho chương trình tính toán xác định CCT. Đồng thời, sự thay đổi của CCT theo sự biến thiên của các thông số chế độ xác lập cũng được khảo sát. Do có rất nhiều thông số chế độ xác lập, trong nội dung bài báo này chỉ xét đến sự ảnh hưởng của một số thông số chính như công suất tác dụng của máy phát, công suất phản kháng của máy phát trước sự cố.

Các kết quả tính toán CCT được thể hiện trong bảng 1 và bảng 2 dưới đây.

**Bảng 1. CCT khi các máy phát sự cố với lưới IEEE 9 nút**

| Máy phát | $P_g$ (MW) | CCT (s) | $P_g$ mới (MW) | CCT sau khi thay đổi P (s) |
|---|---|---|---|---|
| 2 (nút 2) | 163 | 0,36047 | 193 | 0,14016 |
| 3 (nút 3) | 85 | - | - | - |

**Bảng 2. CCT khi các máy phát sự cố với lưới IEEE 39 nút**

| Máy phát | $P_g$ (MW) | CCT (s) | $P_g$ mới (MW) | CCT sau khi thay đổi P (s) |
|---|---|---|---|---|
| 1 (nút 30) | 250 | 0,26047 | 150 | 0,25734 |
| 6 (nút 35) | 650 | 0,20578 | 550 | 0,22453 |
| 7 (nút 36) | 560 | 0,18234 | 460 | 0,23234 |
| 8 (nút 37) | 540 | 0,18234 | 440 | 0,21672 |
| 9 (nút 38) | 830 | 0,08859 | 530 | 0,26828 |

Các kết quả trên cho thấy, công suất phát của máy phát trước sự cố có ảnh hưởng đáng kể đến thời gian cắt tới hạn CCT. Đây là kết quả hợp lý, bởi theo phương pháp cân bằng diện tích, việc giảm công suất tuabin sẽ có tác dụng làm tăng diện tích hãm tốc sau sự cố.

## 3. KẾT LUẬN

Nội dung trên trình bày phương pháp tính thời gian cắt tới hạn dựa trên mô phỏng quá trình quá độ. Các kết quả mô phỏng cho thấy, phương pháp xác định CCT dựa trên lặp liên tiếp, và giảm bước tìm kiếm trong mỗi bước lặp cho phép xác định CCT một cách tương đối hiệu quả. Các kết quả này được dùng làm cơ sở đánh giá độ ổn định động của hệ thống điện và cho phép người vận hành có những điều chỉnh phù hợp trong quá trình vận hành cũng như quy hoạch nhằm nâng cao độ tin cậy cho hệ thống điện.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Bách (2001), *Ổn định của hệ thống điện*, Nxb. Đại học Bách Khoa, Hà Nội.

[2] Doãn Thanh Cảnh (2015), *Nghiên cứu phương pháp mô phỏng và đánh giá ổn định động hệ thống điện*, Luận văn thạc sỹ kỹ thuật hệ thống điện Trường Đại học Bách Khoa, Hà Nội.

[3] Trần Kỳ Phúc (2012), *Nghiên cứu xây dựng hệ thống đánh giá giám sát an ninh hệ thống điện Việt Nam*, Đề tài độc lập 2010T/07 Viện năng lượng, Hà Nội.

[4] Lã Văn Út (2011), *Phân tích & điều khiển ổn định hệ thống điện*, Nxb. Khoa học Công nghệ, Hà Nội.

[5] MATDYN, http://www.esat.kuleuven.be/electa/teaching/matdyn/index#documentaion

[6] Venkataramana Ajjarapu (2006), *Computational techniques for voltage stability assessment and control*, Iowa State University, USA.

[7] R. D. Zimmerman, C. E. Murillo-Sanchez, and R. J. Thomas (2011), *MATPOWER: Steadystate operations, planning and analysis tools for power systems research and education*, IEEE Transactions on Power Systems,vol. 26, no. 1.

# SIMULATION AND ASSESSMENT OF THE TRANSIENT STABILITY OF MULTI-GENERATORS POWER SYSTEM

**Doan Thanh Canh**

ABSTRACT

*In order to ensure the transient stability of the power system, it is essential to evaluate the system ability to maintain synchronization after a large and small disturbance. This paper presents the transient stability simulation method and the critical clearing time determination method based on consecutive iterations and reduction of the searching step in each iteration step. These methods were tested on the 9-bus IEEE and 39-bus IEEE power systems. Tested results show that the critical clearing time (CCT) was efficiently determined; it is a reliable basis for evaluating the transient stability of the power system.*

**Keywords:** *Power system, transient stability, critical clearing time.*

# PHƯƠNG PHÁP PHÂN LẬP VÀ ĐỌC TRÌNH TỰ GEN ITS LOÀI LAN KIM TUYẾN (*ANOECTOCHILUS SETACEUS* BLUME.) TẠI THANH HÓA

**Lê Đình Chắc[1], Nguyễn Thị Hiền[2]**

TÓM TẮT

*Lan kim tuyến Anoectochilus setaceus Blume thuộc chi Anoectochilus, họ Lan - Orchidaceae là loài thực vật quý hiếm, nhưng đang bị đe dọa tuyệt chủng cao do khai thác quá mức. Trong bài báo này, chúng tôi miêu tả phương pháp tách chiết DNA và xác định trình tự đoạn ITS (Internal transcribed spacer) thuộc hệ gen nhân cho 4 mẫu Lan kim tuyến được thu tại Khu bảo tồn thiên nhiên (KBTTN) Xuân Liên và Pù Luông, Thanh Hóa. Mục đích của bài báo nhằm cung cấp một quy trình hiệu quả cho việc xác định trình tự gen ITS loài Lan kim tuyến và có thể áp dụng cho những loài cùng chi. Đây là bước thực nghiệm quan trọng, nhằm xác định dữ liệu trong kế hoạch nghiên cứu hệ thống học phân tử và tiến hóa phân tử chi Anoectochilus. Kết quả, trình tự DNA vùng ITS đã được xác định thành công cho 4 mẫu nghiên cứu, kích thước thu được là 643 nucleotide. So sánh với dữ liệu vùng gen ITS cho thấy Lan kim tuyến Anoectochilus Setaceus Blume có mức độ tương đồng cao, tới 99% với các loài cùng chi A.albolineatus, A.lylei, A.formossanus và A. koshunensis. Kết quả nghiên cứu là lần đầu tiên cung cấp các dữ liệu phân tử cho loài Lan kim tuyến với mẫu thu ở Việt Nam. Đây cũng là một dữ liệu cho phân loại và nghiên cứu nguồn gốc phát sinh loài, cung cấp các thông tin hữu ích cho chiến lược bảo tồn.*

**Từ khóa:** *Lan kim tuyến (Anoectochilus setaceus Blume), trình tự gen ITS, mã vạch DNA.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lan kim tuyến có số lượng ít, mọc rải rác tại một số khu rừng núi cao và bị khai thác trái phép quá mức, vì vậy Lan kim tuyến đã được đưa vào Sách đỏ Việt Nam năm 2007, xếp hạng EN A1a,c,d và được Chính phủ đưa vào Nghị định 32/2006/NĐ-CP [1] ở nhóm bị cấm khai thác sử dụng với mục đích thương mại.

Mặt khác Lan kim tuyến là cây thuốc có tác dụng tăng cường sức khỏe chữa viêm gan mãn tính, suy nhược thần kinh [3], gần đây loài này được phân tích hóa học và xác định có các chất quercetin, isoharmnetin-3-O-beta-D-glucopyranosid, kaempferol-3-O-beta-D-glucopyranosid, 5-hydroxy-3'-4'-7'-trimethoxyflavonol-3-O-beta-D-rutinosid và isorhamnetin-3-O-beta-D-rutinosid… có khả năng chống ung thư [8].

Nơi sống và sinh thái của Lan kim tuyến (*Anoectochilus setaceus* Blume.): Mọc rải rác trong rừng núi đá vôi, nơi ẩm, dọc theo khe suối, ở độ cao 250-700m, tránh nắng trực tiếp,

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*
[2] *Giáo viên Trường Trung học phổ thông Đào Duy Từ, Thanh Hóa*

thân và lá màu tím, trên mỗi chiếc lá có từ 3 đến 5 sọc dọc. Lan bò trên mặt đất cao 10-20cm, phần non hơi có lông thưa; lá hình trái xoan hay hình trứng, tròn ở gốc, phiến lá dài 3-4cm, rộng 2-3cm, mặt trên màu nâu thẫm có vệt vàng ở giữa và màu hồng nhạt trên các gân, mặt dưới màu nâu nhạt, cuống lá dài 1-2cm, ở gốc rộng ra thành bẹ ôm lấy thân; từ tháng 10-12 là mùa hoa của Lan kim tuyến, cụm hoa dài 5-7cm, mang 5-10 hoa màu hồng khá to (dài cỡ 2,5cm); cánh môi dài 15mm, mang 6-8 ria mỗi bên, đầu môi chẻ đôi thành 2 thùy hình thuôn tròn đầu; bầu dài 13mm, có lông thưa; tái sinh chủ yếu bằng chồi của thân rễ.

Gần đây trong các nghiên cứu phân loại thực vật ở mức độ loài, vùng ITS là locus được giải mã phổ biến nhất. Vùng ITS có hiệu quả cao trong nghiên cứu phân loại nhiều đối tượng thực vật và nấm (ngoại trừ dương xỉ), và đây là một locus được sử dụng đọc trình tự với DNA ngắn (Stoeckle et al, 2003) [11]. Ở mức độ loài, vùng ITS có mức độ đa dạng cao (khoảng 13,6% giữa các loài gần gũi) và đã được chứng minh trong hầu hết các nghiên cứu. Thuận lợi của vùng ITS là có thể nhân bản theo hai đoạn nhỏ hơn (ITS1 và ITS2) nằm hai bên với locus 5,8S, điều này rất có ý nghĩa khi nhân bản các mẫu bị hư hại. Vùng ITS cũng đã được chứng minh có mức độ biến đổi thấp bên trong loài (Baldwin et al, 1995) [5].

Ngày nay với sự hiện diện của trên 100.000 trình tự ITS (tính đến 12/2016) được công bố trên ngân hàng Genbank, đây là nguồn tư liệu có giá trị, mở ra những triển vọng lớn cho nghiên cứu giám định loài, số lượng các trình tự vẫn tiếp tục được bổ sung hàng ngày.

Với những lý do trên chúng tôi phân lập và đọc trình tự vùng gen ITS cho 4 mẫu Lan kim tuyến ở Thanh Hóa. Kết quả của nghiên cứu sẽ là cơ sở cho việc sử dụng quy trình để phân lập vùng gen ITS và các vùng gen khác cho các loài thuộc chi *Anoectochilus*. Đây sẽ là nguồn dữ liệu để cho chúng tôi thực hiện một phân tích tổng thể về nguồn gốc phát sinh loài phân tử (molecular phylogeny) cho chi *Anoectochilus*.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Vật liệu và phương pháp

#### *2.1.1. Đối tượng nghiên cứu*

Khảo sát thực địa được tiến hành từ tháng 6/2016 đến tháng 8/2016 tại Khu bảo tồn thiên nhiên Xuân Liên và Pù Luông. Mẫu lá non thu tại thực địa được cho vào trong túi bảo quản có chứa hạt hút ẩm silicagel, tại phòng thí nghiệm mẫu được bảo quản ở -20$^{o}$C trước khi mang tách chiết DNA. Bốn mẫu được nhận định hình thái là loài Lan kim tuyến, thông tin mẫu nghiên cứu chi tiết bảng 1.

**Bảng 1. Thông tin các mẫu sử dụng trong nghiên cứu phân tử**

| TT | Ký hiệu mẫu | Tọa độ | | Độ cao | Địa điểm |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Vĩ độ (N) | Kinh độ (E) | | |
| 1 | XL1 | $19^0$ 052’ | $104^0$ 058’ | 650 | KBTTN Xuân liên |
| 2 | XL2 | $19^0$ 052’ | $104^0$ 058’ | 650 | KBTTN Xuân liên |
| 3 | PL1 | $20^0$ 21’ | $105^0$ 02’ | 570 | KBTTN Pù Luông |
| 4 | PL2 | $20^0$ 21’ | $105^0$ 02’ | 570 | KBTTN Pù Luông |

Trình tự cặp mồi ITS, chi tiết bảng 2.

**Bảng 2. Trình tự cặp mồi ITSF và ITSR**

| Tên mồi | | Trình tự mồi (5'- 3') | Kích thước theo lý thuyết | Nguồn |
|---|---|---|---|---|
| ITS | ITSF | AGGAGAAGTCGTAACAAGGTTTCC | 700 bp | Sun et al., 1994 [9] |
| | ITSR | GATATGCTTAAACTCAGCGGGTC | | |

*2.1.2. Phương pháp nghiên cứu*

*Tách DNA tổng số*

DNA tổng số được tách chiết từ lá non của các mẫu Lan kim tuyến thực hiện theo phương pháp CTAB của Doyle 1987 [7] có cải tiến.

*Bước 1.* Lấy 1g lá non nghiền trong nitơ lỏng thành bột mịn. Thu 75mg mẫu đã nghiền mịn vào eppendorf 1,7ml.

*Bước 2.* Thêm vào mỗi ống 500µl đệm chiết (bao gồm các thành phần: Tris - HCl 100mM; EDTA 20mM; CTAB 2%; NaCl 1,4M; nước với pH =8,0), mix nhẹ, ủ ở nhiệt độ 60°C trong vòng 2 giờ (30 phút đảo nhẹ ống 1 lần). Sau khi ủ xong, lấy ra để ở nhiệt độ phòng 5 phút.

*Bước 3.* Bổ sung dung dịch hỗn hợp chloroform-isoamylalcohol (24:1) vào mẫu theo tỷ lệ 1:1, đảo đều ống trong 15 phút. Li tâm trong 15 phút, với tốc độ 12000 vòng/phút ở 4°C. Hút cẩn thận dịch trong ở pha trên sang ống eppendorf 1,7µl mới.

*Bước 4.* Lặp lại bước 3.

*Bước 5.* Thêm isopropanol lạnh vào mẫu theo tỷ lệ 1:1, mix nhẹ, tủa DNA ở -20°C cho 1 giờ. Sau đó li tâm trong 15 phút, với tốc độ 12000 vòng/phút ở 4°C, loại dịch thu tủa.

*Bước 6.* Bổ sung 600µl cồn 70%. Li tâm 10 phút, 12000 vòng/phút ở 4°C, loại bỏ dịch thu tủa (lặp lại 2-3 lần), làm khô ở nhiệt độ phòng 30 phút (hoặc bằng máy nhiệt ở 50$^{o}$C trong 10 phút) rồi hòa tan DNA trong 100 µl đệm TE (10 mM Tris-Cl, pH 7.5. 1 mM EDTA). Bảo quản ở tủ -20$^{0}$C đến khi sử dụng.

*Nhân gen ITS bằng kĩ thuật PCR*

Đoạn gen ITS được khuếch đại bằng kỹ thuật PCR với cặp mồi đặc hiệu ITSF/ITSR được thực hiện trên máy PCR T100 thermal Cycler Bio-Rad. Phản ứng được thực hiện với tổng thể tích 25µ, bao gồm các thành phần: 12,5µl Maxter Mix 2X (Thermo -Sientific), 1µl mồi mỗi loại, 1µl DNA khuôn và 9,5µl nước đề ion. Chu trình phản ứng PCR được thực hiện bao gồm: Biến tính khởi động ở 94$^{o}$C trong 4 phút; lặp lại 35 chu kì bao gồm: biến tính ở 94$^{o}$C trong 30 giây, gắn mồi ở 55$^{o}$C trong 40 giây, tổng hợp và kéo dài ở 72$^{o}$C trong 40 giây; phản ứng kết thúc ở 72$^{o}$C trong 10 phút và bảo quản mẫu ở 4$^{o}$C.

*Điện di kiểm tra sản phẩm PCR-ITS*

Sản phẩm PCR được điện di trên agarose 0,8% và sau đó ngâm trong Ethidium bromide trong 10 phút trước khi quan sát dưới máy soi UV và chụp ảnh.

*Tinh sạch sản phẩm PCR*

Sản phẩm PCR được tinh sạch bằng Kit GenJET PCR Purification của hãng Thermo Scientific.

*Phân tích số liệu*

Các trình tự ITS thu được của mẫu nghiên cứu được so sánh với trình tự trong ngân hàng gen bằng công cụ tìm kiếm BLAST. Do 4 mẫu có trình tự DNA vùng ITS tương đồng 100% nên chúng tôi chỉ thực hiện một lần tìm kiếm.

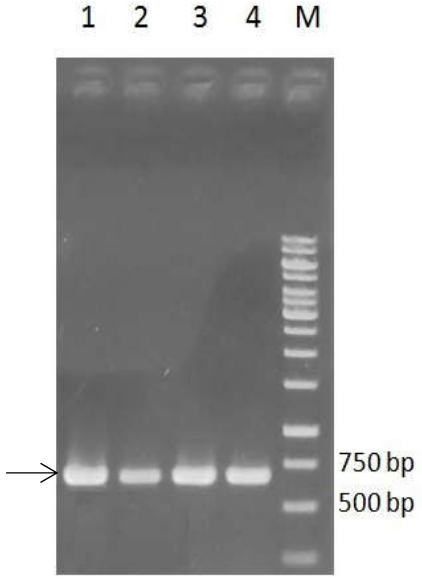
Trình tự ITS của 4 mẫu nghiên cứu cùng với trình tự ITS lấy từ Genbank của các loài có mức độ tương đồng cao nhất trong kết quả tìm kiếm bằng BLAST, được sắp xếp lại (Alignment) bằng chương trình Clustal v1.8 trong Bioedit và tạo cây phát sinh loài Neighbor -Joining bằng phầm mềm MEGA5.2.2.

**2.2. Kết quả và thảo luận**

*2.2.1. Kết quả*

Chúng tôi đã tách chiết DNA tổng số và thực hiện thành công phản ứng PCR cho 4 mẫu nghiên cứu theo quy trình nêu trên. DNA tổng số không có màu và hòa tan hoàn toàn trong dung dịch TE.

Sản phẩm PCR có hàm lượng cao và cho 1 băng sắc nét (hình 1). Kích thước ước lượng vào khoảng 700bp so với thang chuẩn DNA.



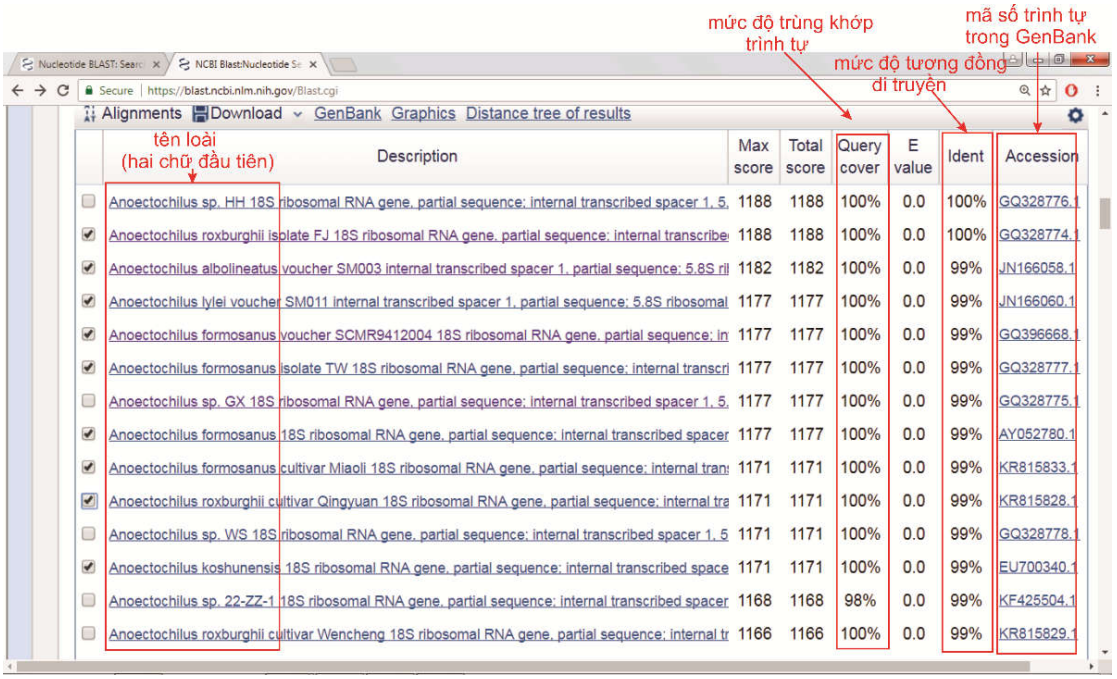

**Hình 1. Kết quả PCR 4 mẫu với cặp mồi *ITS***

*(Giếng 1: XL1, giếng 2: XL2; giếng 3: PL1; giếng 4: PL2, M: Marker 1kb)*

Trình tự DNA vùng ITS của 4 mẫu nghiên cứu đã được giải trình tự thành công với kích thước thu được là 643bp. Sơ đồ điện di giải trình tự cho các đỉnh huỳnh quang rõ ràng, không có đột biến poly nucleotide (sự lặp lại trên 10 nucletide cùng loại liên tiếp có thể làm phản ứng

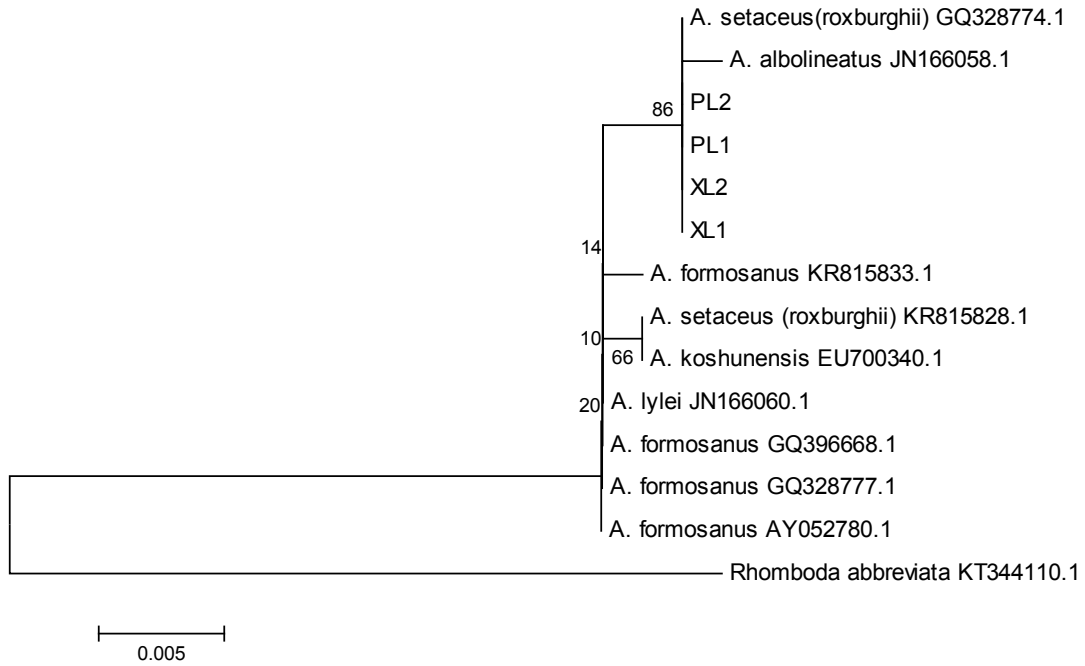
PCR bị dừng lại, trong trường hợp này phải đọc trình tự 2 chiều để thu được độ dài đầy đủ của đoạn sản phẩm). Bốn mẫu nghiên cứu thu được có trình tự DNA tương đồng 100%.

Trình tự gen ITS được BLAST trên ngân hàng GenBank (https://blast.ncbi.nlm .nih.gov/Blast.cgi?PAGE_TYPE=BlastSearch). Do trình tự 4 mẫu tương đồng 100%, do đó chúng tôi chỉ thực hiện một lần tìm kiếm BLAST. Kết quả tìm kiếm thu được mức độ tương đồng di truyền giữa Lan kim tuyến thu ở Thanh Hóa và trình tự Genbank: 1) Từ 99 - 100% với loài Lan kim tuyến *A.setaceus* (tên đồng nghĩa là *A.Roxburghii*); 2) 99% với các loài *Anoectochilus albolineatus, Anoectochilus formosanus, Anoectochilus koshunensis.*




**Hình 2. Kết quả tìm kiếm BLAST trên ngân hàng dữ liệu quốc tế của mẫu nghiên cứu**

Thông tin từ kết quả tìm kiếm BLAST cho thấy, đoạn trình DNA mà chúng tôi phân lập được chính xác là vùng ITS. Mức độ trùng khớp trình tự là 100% trong các trình tự được lựa chọn để so sánh (các trình tự tích chữ ✓ hình 2). Kết quả cũng cho thấy, sự giống nhau về mặt di truyền giữa các loài họ hàng gần với Lan kim tuyến *A.setaceus* là khá cao. Mức tương đồng cao lên đến 99% cho thấy khó có thể tách biệt được riêng rẽ các loài trong nhóm này nếu chỉ dựa vào dữ liệu trình tự vùng ITS. Kết quả thể hiện tương tự trên cây tiến hóa suy luận theo phương pháp NJ (hình 3). Cây NJ không tách biệt được các loài. Bốn mẫu Lan kim tuyến thu được ở Thanh Hóa và mẫu Lan kim tuyến có mã số Genbank GQ328774.1 cùng tạo một nhóm với giá trị bootraps cao (86%), tuy nhiên nhóm này cũng chứa loài *Anoectochilus albolineatus (*JN166058.1). Các trình tự còn lại của các loài *A.formosanus*, *A.lylei, A.koshunensis* và kể cả trình tự KR815828.1 của Lan kim tuyến *A.setaceus* đều nằm trên một đường thẳng đứng và không tách biệt được với nhau thành các nhóm rõ ràng. Giá trị boostraps nhỏ, không có ý nghĩa (do nhỏ hơn 50%) cho thấy chỉ dữ liệu DNA vùng ITS chưa đủ để bộc lộ được mối quan hệ phát sinh giữa các loài của nhóm này.




**Hình 3. Cây phát sinh loài suy luận theo phương pháp NJ với số lần lặp lại bootraps là 1000. Loài *Rhomboda abbreviata* được sử dụng làm outgroup. Cây NJ không phân tách được Lan kim tuyến và các loài gần gũi**

```
                          10        20        30        40        50        60
XL1                       GGATGACTTT GGATAACACG TGAACATTTG
ACGGCGGTTG CTGTCTATAA ACACCATCCA
XL2                       .......... .......... .......... .......... .......... ..........
PL1                       .......... .......... .......... .......... .......... ..........
PL2                       .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.setaceus(roxburghii)GQ328774  .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.setaceus(roxburghii)KR815828  .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.albolineatus JN166058.1  .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.lylei JN166060.1         .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.formosanus GQ396668.1    .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.formosanus GQ328777.1    .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.formosanus AY052780.1    .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.formosanus KR815833.1    .......... .......... .......... .......... .......... ..........
A.koshunensis EU700340.1   .......... .......... .......... .......... .......... ..........
                          70        80        90        100       110       120
XL1                       TCTATTGGCC CCTCTTGATT GAGGCAACAA
TAAAAAGATG GAGGGAAAAA CAACTCGGGC
```

XL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.albolineatus JN166058.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus KR815833.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....

130 140 150 160 170 180

XL1 GCAGTTGTGC GCCAAGGAAG TATGTTGCAT TGGCATCGAT GACTATTCGC CAAAGCCTGT
XL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.albolineatus JN166058.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus KR815833.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....

190 200 210 220 230 240

XL1 CGTGCTTAGC GGAGTGTTGT TGTTGCTTCT TAAGTATTGT ATGACTCTCG GCAATGGATA
XL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.albolineatus JN166058.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....

```
A.formosanus KR815833.1          ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
                                  250       260       270       280       290       300
XL1                               TCTTGGCTCT TGCATCGATG AAGAGCGCAG
CGAAATGCGA TACGTGGTGT GAATTGCAGA
XL2                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774    ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828    ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.albolineatus JN166058.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1                ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus KR815833.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1          ..... ..... ..... ..... ..... .....
                                  310       320       330       340       350       360
XL1                               ATCCCGTGAA CCATCAAATC TTTGAACGCA
AGTTGCGCCT GAGGCCAATT GGCTAAGGGC
XL2                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774    ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828    ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.albolineatus JN166058.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1                ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus KR815833.1           ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1          ..... ..... ..... ..... ..... .....
                                  370       380       390       400       410       420
XL1                               ACGTCCGCCT GGGCGTCAAG CATTACATCG
CTTCATTCGA CACCAATTGC CCAGTATTTT
XL2                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2                               ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774    ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828    ..... ..... ..... ..... ..... .....G.
```

A.albolineatus JN166058.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....G.
A.formosanus GQ396668.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....G.
A.formosanus GQ328777.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....G.
A.formosanus AY052780.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....G.
A.formosanus KR815833.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....G.
A.koshunensis EU700340.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....G.

430 440 450 460 470 480

XL1 GCTGTGGTGC TGGTCTGAAT GCGGAGAGTG GCCCTTCGTG CACACTTGTG CGACGGGTTG
XL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.albolineatus JN166058.1 ..... ..... ..... ..... ..... T.....
A.lylei JN166060.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus KR815833.1 ..... .C..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....

490 500 510 520 530 540

XL1 AAGAACAATT TGCTTTCCTC TGGCCATGTT TTGATAAAGG GGTGGTGTAT GCAGCCATTA
XL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828 ..... ..... ..... ..... ..... .....T
A.albolineatus JN166058.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....T
A.formosanus GQ396668.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....T
A.formosanus GQ328777.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....T
A.formosanus AY052780.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....T
A.formosanus KR815833.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....T
A.koshunensis EU700340.1 ..... ..... ..... ..... ..... .....T

550 560 570 580 590 600

XL1 GGCCCACACT ATCATCTCAT TGCCTTGAGG AGGATAAATG TACACATTCG TGGCTGATCA

```
XL2                          ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL1                          ..... ..... ..... ..... ..... .....
PL2                          ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)GQ328774  ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.setaceus(roxburghii)KR815828  ..... ..... ..... ..... .....A .....
A.albolineatus JN166058.1       ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.lylei JN166060.1              ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ396668.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus GQ328777.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus AY052780.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.formosanus KR815833.1         ..... ..... ..... ..... ..... .....
A.koshunensis EU700340.1        ..... ..... ..... ..... .....A .....
                                610       620       630       640
XL1                          CCCGATATAA ATGTCGCAGG TGACGCCCTG
AAATGCGACC CCA
XL2                          ..... ..... ..... ..... ...
PL1                          ..... ..... ..... ..... ...
PL2                          ..... ..... ..... ..... ...
A.setaceus(roxburghii)GQ328774  ..... ..... ..... ..... ...
A.setaceus(roxburghii)KR815828  ..... ..... ..... ..... ...
A.albolineatus JN166058.1       ..... ..... ..... ..... ...
A.lylei JN166060.1              ..... ..... ..... ..... ...
A.formosanus GQ396668.1         ..... ..... ..... ..... ...
A.formosanus GQ328777.1         ..... ..... ..... ..... ...
A.formosanus AY052780.1         ..... ..... ..... ..... ...
A.formosanus KR815833.1         ..... ..... ..... ..... ...
A.koshunensis EU700340.1        ..... ..... ..... ..... ...
```

**Hình 4. Kết quả đối chiếu trình tự 4 mẫu nghiên cứu với trình tự Lan kim tuyến trên GenBank và các loài gần gũi. Trình tự ITS của các loài có ít vị trí nucleotide khác nhau**

Các kết quả sắp xếp lại trình tự (alignment) bằng Clustal W cho thấy, có rất ít vị trí đa hình trên vùng ITS trong số các loài được so sánh ở trên. Trên tổng chiều dài 643pb được so sánh chỉ có 5 vị trí biến đổi, số lượng các vị trí nucleotide mang thông tin tiến hóa (Parsimony information) còn ít hơn với số lượng là 3.

Vùng ITS có mức độ da dạng thấp giữa các loài của *Anoectochilus*. Để làm rõ trạng thái taxon và mối quan hệ di truyền trong chi *Anoectochilus,* chúng tôi có kế hoạch phân lập và giải trình tự các vùng gen khác thuộc hệ gen lục lạp như *rbcL*, *matK*, khoảng trống *trnH -psbA*, những vùng gen thường được sử dụng trong nghiên cứu tiến hóa phân tử. Các kết quả nghiên cứu chi tiết hơn về mối quan hệ phát sinh loài của chi *Anoectochilus,* sẽ được trình bày trong các nghiên cứu tiếp theo.

*2.2.2. Một số nhận xét từ quá trình tách chiết DNA*

Với quy trình nêu trên, chúng tôi có thể hoàn tất quá trình phân lập trình tự trong vòng 2 ngày. Ngày thứ nhất thực hiện tách chiết DNA với thời gian từ 5 - 6 tiếng; ngày thứ 2 thực hiện phản ứng PCR khuếch đại trình tự đoạn gen đích. Quy tình tách chiết DNA tổng số cho chất lượng tốt; bằng chứng là phản ứng PCR cho hàm lượng sản phẩm rất cao, được thể hiện bằng 1 băng đậm trên bản điện di kiểm tra. Tất cả quá trình thực nghiệm được thực hiện tại phòng thí nghiệm sinh học phân tử - Bảo tàng thiên nhiên Việt Nam.

Phân lập và xác định trình tự DNA của các đoạn gen là công việc đầu tiên trong nghiên cứu nguồn gốc phát sinh loài phân tử. Quá trình này rất quan trọng bởi nó cung cấp dữ liệu đầu vào cho các phân tích tiến hóa phân tử. Sự chính xác của dữ liệu giải trình tự sẽ cho kết quả phân tích nguồn gốc phát sinh loài được chính xác. Do đặc tính có độ nhạy cao, phản ứng PCR có thể khuếch đại đoạn gen đích từ hàm lượng DNA khuôn rất nhỏ. Việc lây nhiễm DNA ngoại lai vào DNA khuôn có thể dẫn tới kết quả trình tự thu được không chính xác, trình tự không phải của loài được nghiên cứu, từ đó dẫn đến những nhận định và đánh giá nhầm về trạng thái taxon và nguồn gốc phát sinh loài. Sự nhiễm DNA ngoại lai có thể đến từ nhiều khâu: nó có thể bị nhiễm từ giai đoạn thu mẫu ban đầu, hoặc giai đoạn tách chiết DNA hoặc thậm chí khi thực hiện phản ứng PCR. Do đó quy trình cần thực hiện nghiêm túc và cẩn thận ngay từ bước ban đầu. Mẫu thực vật được thu đúng cách là điều rất cần thiết cho tối ưu phản ứng PCR và đọc trình tự thành công. Chìa khóa đối với quy trình này là lá để tách chiết DNA phải được làm khô một cách nhanh chóng nhằm bảo vệ khỏi hư hại DNA. Mẫu thu ngoài thực địa ngay lập tức cần được lấy mẫu cho nghiên cứu DNA. Mẫu cho nghiên cứu DNA phải được bỏ vào túi đựng silica gel ngay sau khi hái. Trong trường hợp không thể, mẫu cho tách DNA nên được lấy ở cuối ngày. Việc chậm trễ làm khô nguyên liệu trong silica gel có thể dẫn tới kết quả làm giảm chất lượng DNA và sự thành công PCR thấp hơn. Các mẫu lá tươi nên được giữ trong các túi riêng biệt vì các mẫu để cùng nhau có thể làm tăng khả năng bị nhiễm với nhau. Loại túi nhựa 10 x 15cm có chứa silica là dụng cụ thích hợp chứa mẫu phân tích DNA. Trong quá trình tách chiết DNA, mẫu sau khi được xay mịn bằng nitơ lỏng yêu cầu cần được lấy một cách cẩn thận vào các eppendorf sạch. Việc mở nắp để cho đệm chiết vào mẫu cần được tiến hành một cách cẩn thận do mẫu đang ở trạng thái lạnh có thể sẽ dính ở nắp của eppendorf. Lượng mẫu tối ưu cho tách chiết DNA trong nghiên cứu của chúng là 60mg - 100mg. Việc lấy quá nhiều mẫu có thể làm DNA tổng số bị bẩn, chứa nhiều màu và dẫn tới phản ứng PCR không thành công. Để hạn chế được sự lây nhiễm DNA ngoại lai trong quá trình PCR, chúng tôi gợi ý các phản ứng PCR nên được thực hiện trong buồng thực nghiệm các laminar chuyên biệt.

## 3. KẾT LUẬN

Chúng tôi đã phân lập và đọc trình tự thành công vùng gen ITS các mẫu của Lan kim tuyến *Anoectochilus Setaceus* thu ở Khu bảo tồn thiên nhiên Xuân Liên và Khu bảo tồn thiên nhiên Pù Luông - Thanh Hóa. Kích thước vùng gen ITS chúng tôi thu được là 643bp.

Trình tự vùng gen ITS của các mẫu Lan kim tuyến thu ở Khu bảo tồn thiên nhiên Xuân Liên và Pù Luông độ tương đồng với nhau là 100%.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bách khoa toàn thư mở Wikipedia, Lan kim tuyến, https://vi.wikipedia.org/wiki /Lan_kim_tuy%E1%BA%BFn

[2] Phạm Hoàng Hộ (2000), *Cây cỏ Việt Nam*, Nxb. Trẻ, TP. Hồ Chí Minh, 3: 474-475.

[3] Hội dược liệu Việt Nam (2013), *Tạp chí cây thuốc quý toàn tập*, Nxb. Hiệp hội dược liệu Việt Nam, tr.13-15.

[4] Chu Hoàng Mậu (2008), *Phương pháp phân tích di truyền hiện đại trong chọn giống cây trồng*, Nxb. Đại học Thái Nguyên.

[5] Baldwin, B.G., Sanderson, M.J., Porter, J.M., Wojciechowski, M.F., Campbell, C.S., Donoghue, M.J., (1995), *The ITS region of nuclear ribosomal DNA-A valuable source of evidence on Angiosperm phylogeny*, Ann. Mo. Bot. Gard. 82, 247-277.

[6] Cai JY[1], Gong LM, Zhang YH, Ruan HL, Pi HF, Wu JZ (2008), *Studies on chemical constituents from Anoectochilus roxburghii*, Zhong Yao Cai. 31(3), pp. 370-372.

[7] Doyle J (1987), *A rapid procedure for DNA purification from small quantities of fresh leaf tissue*, Phytochem Bull. 19: 11-15.

[8] He CN[1], Wang CL, Guo SX, Yang JS, Xiao PG (2005), *Study on chemical constituents in herbs of Anoectochilus roxburghii II*, Zhongguo Zhong Yao Za Zhi. May; 30(10),pp. 761-763.

[9] Kress JW, Wurdack KJ, Zimmer EA, Wei LA, Janzen DH (2005), *Use of DNA barcodes ti identify flowering plants*, Proc.Natl.Acad.Sci *USA* 102: 8369-8374.

[10] Sambrook J., Fritsch E. F., and Maniatis T. (1989), *Molecular cloning I, II, III*, A Laboratory Mannual, Cold Spring Harbor Laboratory Press.

[11] Stoeckle M (2003), *Taxonomy, DNA and the bar code of life*, BioScience 53: 2-3.

[12] Sun, Y., Skinner, D.Z., Liang, G.H., Hulbert, S.H., (1994), *Phylogenetic analysis of Sorghum and related taxa using internal transcribed spacers of nuclear ribosomal DNA*. Theor. Appl. Genet. 89, 26-32.

# METHOD OF FILING AND GENETIC GENERATORS OF KIM LONG SPECIES (*ANOECTOCHILUS SETACEUS* BLUME.) IN THANH HOA

**Le Dinh Chac, Nguyen Thi Hien**

ABSTRACT

*Orchid gills Anoectochilus setaceus Blume is a rare plant of the genus Anoectochilus, Orchidaceae. This species is highly endangered due to overexploitation. A full understanding*

*of the location and diversity of orchid and neighboring species is essential, providing useful information for the conservation strategy. In this paper, we describe the method of DNA extraction and sequencing of the internal transcribed spacer segment of the human genome for four samplings obtained at Xuan Lien Nature reserve and Pu Luong Nature reserve Thanh Hoa province. The purpose of this paper is to provide an effective procedure for identifying the ITS genus orchid and may be applicable to the same species. This is an important experimental step in identifying the data in our molecule molecular evolutionary anoectochilus and molecular system study. As a result, ITS DNA sequences have been successfully identified from the four samples. The resulting size is 643 nucleotides. Compared to the ITS genomic data, Anoectochilus Setaceus Blume has a high degree of homologation, up to 99% with the same species of A.albolineatus, A.lylei, A.formossanus and A.koshunensis. The results of the study are also the first to provide molecular data for orchid species in Vietnam. This is also a data for classification and study of phylogenetic origin.*

**Keywords:** *Anoectochilus Setaceus Blume, gen ITS, DNA barcoding.*

# KHÔI PHỤC XẤP XỈ HÀM TRONG KHÔNG GIAN BESOV BẰNG B-SPLINES

**Nguyễn Mạnh Cường[1], Mai Xuân Thảo[2]**

TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mở rộng một số kết quả của GS. Đinh Dũng trong việc sử dụng khôi phục thích nghi tối ưu đối với các hàm thuộc tập hợp* $W \subset L_q(\prod), 0 < q \le \infty$.

**Từ khóa:** *Khôi phục thích nghi, biểu diễn giả nội suy, không gian Besov.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta xét bài toán khôi phục xấp xỉ hàm số xác định trên đoạn $\prod = [0,1]$. Hàm số cần khôi phục thuộc tập hợp $W \subset L_q(\prod), 0 < q \le \infty$. Ở đây $L_q(\prod)$ là không gian định chuẩn các hàm xác định trên $\prod$ với chuẩn tích phân $\|.\|_q$ thông thường cho trường hợp $0 < q < \infty$, và không gian định chuẩn $C(\prod)$ các hàm liên tục trên $\prod$ với chuẩn max $\|.\|_q$ khi $q = \infty$ bằng lớp hàm Besov có modul của độ trơn bị chặn.

Cho B là một tập hợp con trong $L_q$, chúng ta sẽ định nghĩa phương pháp khôi phục với các điểm giá trị lấy mẫu và hàm sẽ khôi phục thích nghi từ B theo từng hàm $f \in W$. Đối với từng hàm $f \in W$ ta chọn $n$ điểm $x^1, ...x^n$, dựa trên thông tin về giá trị lấy mẫu $f(x^1), ...f(x^n)$ ta chọn hàm $g = S_n^B(f)$ để khôi phục hàm $f$. Khi đó $S_n^B$ là một phương pháp khôi phục thích nghi. Toán tử $S_n^B(f)$ được định nghĩa chính xác như sau:

Đặt $I^n$ là tập hợp bao gồm các tập hợp $\xi$ trong $\prod$ có số phần tử không quá $n$, $V^n$ là tập hợp mà mỗi phần tử là một bộ các số thực $a_\xi = \{a(x)\}_{x \in \xi}, \xi \in I^n, a(x) \in \mathbb{R}$.

Gọi $I_n$ là một ánh xạ từ $W$ đến $I^n$ và $P$ là ánh xạ từ $V^n$ đến $B$. Khi đó cặp $(I_n, P)$ xác định một ánh xạ $S_n^B$ từ $W$ đến $B$ cho bởi công thức

$$S_n^B(f) := P\left(\{f(x)\}_{x \in I_n(f)}\right) \tag{1.1}$$

Chúng ta muốn chọn một phương pháp khôi phục lấy mẫu $S_n^B$ mà các sai số của khôi phục này $\|f - S_n^B(f)\|_q$ càng nhỏ càng tốt. Rõ ràng một sự lựa chọn hiệu quả cần được thích nghi với từng hàm số $f$.

[1,2] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Cho B là một họ các tập con $B$ trong $L_q$, khi đó sai số của phương pháp khôi phục thích nghi tối ưu được đo bằng đại lượng

$$R_n(\mathrm{W},\mathrm{B})_q := \inf_{\mathrm{B}\in\mathrm{B}} \inf_{S_n^B} \sup_{f\in\mathrm{W}} \left\| f - S_n^B(f) \right\| q \qquad (1.2)$$

Trong đó $S_n^B$ là tất cả các ánh xạ được định nghĩa ở (1.1). Ký hiệu $R_n(\mathrm{W},\mathrm{B})q$ bằng $e_n(\mathrm{W})_q$ nếu B họ tất cả các tập hợp con B trong $L_q$ sao cho $|B| \le 2^n$, và bằng $r_n(\mathrm{W})_q$ nếu B có giả chiều không quá $n$. Giả chiều được định nghĩa như sau: Cho một tập hợp B các hàm số xác định trên tập $U$, khi đó giả chiều của B được định nghĩa là số nguyên n lớn nhất sao cho tồn tại các điểm $a^1, a^2, ...a^n$ trong $U$ và $b \in \mathbb{R}^n$ để số phần tử của tập hợp: $\left\{ \mathrm{sgn}(y) : y = \left( f(a^1)+b_1, f(a^2)+b_2, ...f(a^n)+b_n \right), f \in B \right\}$ là $2^n$, ở đây $\mathrm{sgn}(x) = 1$ với $t > 0$, $\mathrm{sgn}(x) = -1$ với $t \le 0$ và cho $x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{sgn}(x) = \left( \mathrm{sgn}(x_1), \mathrm{sgn}(x_2), ...\mathrm{sgn}(x_n) \right)$.

Giả sử $\Phi = \left\{ \varphi_k \right\}_{k\in J}$ là họ các hàm số trong $L_q$. Chúng ta định nghĩa $\sum_n \Phi$ là tập hợp phi tuyến bao gồm các tổ hợp tuyến tính của $n$ phần tử bất kỳ trong $\Phi$, có nghĩa là:

$$\sum\nolimits_n \Phi := \left\{ \varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j : \varphi_{kj} \in \Phi \right\}.$$

Chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp khôi phục thích nghi hàm $f \in \mathrm{W}$ bằng các hàm số từ $\sum_n \Phi$. Cho mỗi hàm $f \in \mathrm{W}$, chúng ta chọn một dãy $\xi = \left\{ x^s \right\}_{s=1}^n$ của $n$ điểm trong $\prod$, một dãy $a = \left\{ a_s \right\}_{s=1}^n$ các hàm trên $\mathbb{R}^n$ và một dãy $\Phi_n = \left\{ \varphi_{k_s} \right\}_{s=1}^n$ các hàm trong $\Phi$. Ta định nghĩa phương pháp khôi phục $S(\Phi), a, \xi, f$ như sau:

$$S(\Phi_n, a, \xi, f) := \sum_{s=1}^{n} a_s \left( f(x^1), f(x^2), ..., f(x^n) \right) \varphi_{k_s}$$

Sai số của phương pháp được đo bởi đại lượng

$$s_n(\mathrm{W},\Phi)_q = \inf_{\Phi_n, a, \xi} \sup_{f\in\mathrm{W}} \left\| f - S(\Phi_n, a, \xi, f) \right\|_q . \qquad (1.3)$$

## 2. BIỂU DIỄN SÓNG NHỎ GIẢ NỘI SUY TRONG KHÔNG GIAN BESOV

Cho một số nguyên dương $r$, gọi M là một B-spline trung tâm bậc $2r$ với giá $[-r, r]$ và các nốt là các điểm nguyên $-r, ...o, ....r$, và định nghĩa B-spline sóng nhỏ:

$$M_{k,s}(x) := M(2^k x - s)$$

Cho một số không âm $k$ và $s \in \mathbb{Z}$, thì M là tập hợp tất cả $M_{k,s}$ không triệt tiêu trên $\prod$. Cho $\lambda = \left\{ \lambda(j) \right\}_{j\in P(\mu)}$ là dãy chẵn hữu hạn, tức là $\lambda(j) = \lambda(-j)$, ở đây

$P(\mu) := \{j \in \mathbb{Z} : |j| \le \mu\}$ và $\mu \ge r-1$. Chúng ta định nghĩa toán tử tuyến tính $Q$ cho hàm $f$ trên $\mathbb{R}$ bởi

$$Q(f,x) := \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Lambda(f,s) M(x-s) \tag{2.1}$$

ở đây

$$\Lambda(f,s) := \sum_{j\in P(\mu)} \lambda(j) f(s-j) \tag{2.2}$$

Khi đó toán tử $Q$ bị chặn trên $C(\mathbb{R})$ và $\|Q(f)\|_{C(\mathbb{R})} \le \|\Lambda\| \|f\|$,

ở đây $$\|\Lambda\| = \sum_{j\in P(\mu)} |\lambda(j)|$$

Một toán tử $Q$ được xác định từ (2.1 - 2.2) tái tạo lại $P_{2r-1}$ được gọi là một toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R})$, tức là

$$Q(p) = p, \textit{Trong đó: } p \in P_{2r-1}$$

Chúng ta sẽ cần đến bất đẳng thức đối với chuẩn của $L_p(\prod)$ như sau: Nếu $\tau$ là một số thỏa mãn $0 < \tau \le \min(p,1)$ thì cho bất kỳ một dãy các hàm $\{f_k\}$ ta có bất đẳng thức

$$\left\|\sum f_k\right\|_{p,\mathrm{II}}^{\tau} \le \sum \|f_k\|_{p,\mathrm{II}}^{\tau} \tag{2.3}$$

Nếu $f \in L_p(\prod)$, khi đó $\omega_l(f,t)_p := \sup_{|h|<t} \left\|\Delta_h^l f\right\|_{p,\mathrm{II}(lh)}$

được gọi là modul trơn cấp $l$ của $f$, ở đây $\prod(lh) := \{x : x, x+lh \in \prod\}$ và toán tử sai phân cấp $l$ được định nghĩa bởi:

$$\Delta_h^l f(x) := \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} C_l^j f(x+jh).$$

Cho hàm số $\Omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện:

*(i)* $\Omega(t) > 0, \forall t > 0,$

*(ii)* $\Omega(t) \le c.\Omega(t'), \forall t, t' \in \mathbb{R}_+, t \le t',$

*(iii)* $\forall \gamma \ge 1, \exists C' = C'(\gamma)$ *sao cho* $\Omega(\gamma t) \le C'.\Omega(t), t \in \mathbb{R}_+.$

Cho $0 < p, \theta \le \infty$, thì không gian Besov $B_{p,\theta}^{\Omega}$ được định nghĩa là tập hợp các hàm $f \in L_p(\mathrm{II})$ sao cho chuẩn Besov sau là hữu hạn

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} := \|f\|_p + \|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}},$$

ở đây $|f|_{B_{p,\theta}^{\Omega}}$ là nửa chuẩn Besov, được xác định bởi

$$|f|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} := \begin{cases} \left( \int_{\mathrm{II}} \left\{ \omega_l(f,t)_p / \Omega(t) \right\}^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} & \theta < \infty, \\ \sup_{t\in\mathrm{II}} \left\{ \omega_l(f,t)_p / \Omega(t) \right\} & \theta = \infty. \end{cases}$$

Giả sử $Q$ là một toán tử giả nội suy từ (2.1 - 2.2), cho $h > 0$ và một hàm $f$ xác định trên $\mathbb{R}$, chúng ta xác định toán tử $Q(.;h)$ như sau:

$$Q(f;h) := \sigma_h \circ Q \circ \sigma_{1/h}(f), \text{ ở đây } \sigma_h(f,x) = f(x/h).$$

Từ định nghĩa ta có

$$Q(f,x;h) = \sum_k \Lambda(f,k;h) M(h^{-1}x - k), \text{ với } \Lambda(f,k;h) = \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j) f(h(k-j)).$$

Toán tử $Q(.;h)$ có các tính chất tương tự như toán tử $Q$, cũng được gọi là một toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R})$. Nhưng $Q(.;h)$ không được định nghĩa cho $f$ trên II, và do đó không khôi phục được hàm số $f$ với các điểm lấy mẫu trong $\prod$.

Một cách tiếp cận để xây dựng toán tử giả nội suy cho một hàm số trên $\prod$ là mở rộng nó bằng các đa thức nội suy Lagrange.

Cho một số nguyên không âm $k$, đặt $x_j = j2^{-k}, j \in \mathbb{Z}$. Giả sử $f$ là một hàm số trên $\prod$. Gọi $U_k(f)$ và $V_k(f)$ lần lượt là các đa thức nội suy Lagrange tại $2r$ điểm bên trái $x_0, x_1, ...x_{2r-1}$ và điểm $2r$ điểm bên phải $x_{2k-2r+1}, x_{2^k-2r+3}, ..., x_{2k}$ trên đoạn $\prod$. Hàm số $\overline{f}$ được định nghĩa là hàm số mở rộng của $f$ trên $\mathbb{R}$.

$$\overline{f_k}(x) = \begin{cases} U_k(f,x), & x < 0, \\ f(x) & 0 \le x \le 1, \\ V_k(f,x), & x > 1. \end{cases}$$

Nếu $f$ liên tục trên $\prod$ thì $\overline{f}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $Q$ là một toán tử giả nội suy (2.1 - 2.2) trong $C(\mathbb{R})$,

Khi đó chúng ta xây dựng toán tử $Q_k$ xác định bởi:

$$Q_k(f,x) := Q(\overline{f_k}, x; 2^{-k}), x \in \text{II}.$$

Cho một hàm $f$ trên $\prod$. Khi đó $Q_k(f,x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in \text{II}$, ở đây $J(k) := \{s \in \mathbb{Z}, -r < s < 2^+ + r\}$ và $a_{k,s}(f) := \Lambda\left(\overline{f}_k, s; 2^{-k}\right) = \sum_{|j| \le \mu} \lambda(j) \overline{f_k}\left((2^{-k}(s-j)\right)$.

Để tiện lợi ta quy ước $Q_{-1}(f) = 0$ cho tất cả $f$ trên $\prod$. Đặt $q_k := Q_k - Q_{k-1}$. Chúng ta có $Q_k = \sum_{k' \le k} q_{k'}$.

**Bổ đề 1.** *Với mọi* $f \in C(\prod)$, *ta có* $\|f - Q_k(f)\|_\infty \le C.\omega_{2r}\left(f, 2^{-k}\right)_\infty$

*Và* $\|f - Q_k(f)\|_\infty \to 0, k \to \infty.$

Từ Bổ đề 1 với mỗi hàm liên tục $f$ ta có biểu diễn

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} q_k(f)$$

Sự hội tụ theo chuẩn của $L_\infty(\prod)$, ở đây $q_k(f) = \sum_{s\in J(k)} c_{k,s}(f)M_{k,s}$,

$$c_{k,s}(f) := a_{k,s}(f) - a'_{k,s}(f), k \geq 0,$$

$$a'_{k,s}(f) := 2^{-2r+1} \sum_{(m,j)\in C_r(k,s)} C_{2r}^j a_{k-1,m}(f), k > 0, a'_{0,s}(f) := 0,$$

và $\mathrm{C_r}(k,s) := \{(m,j) : 2m + j - r = s, m \in J(k-1), 0 \leq j \leq 2r\}$, $k > 0, C_r(0,s) := \{0\}$.

Như vậy $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}+} \sum_{s\in J(k)} c_{k,s}(f).M_{k,s}$ (2.4)

Nếu $0 < p < \infty, g \in \sum(k)$, tức là $g = \sum_{s\in J(k)} a_s.M_{k,s}$

thì $\|g\|_p \approx 2^{-k/p}.\|\{a_s\}\|_{p,k}$, (2.5)

ở đây $\|\{a_s\}\|_{p,k} := \left( \sum_{s\in J(k)} |a_s|^p \right)^{1/p}$, với $p = \infty$ ta có chuẩn max tương ứng.

Cho $f$ là hàm số xác định trên $\prod$, khi đó theo (2.5) ta có các chuẩn sau là tương đương

$$B_2(f) := \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left\{ \|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$B_3(f) := \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{-k/p} \left\| \{c_{k,s}(f)\} \right\|_{p,k} / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

**Định lý 1.** *Cho $0 < p, \theta \leq \infty$ và $U$ là hàm số thỏa mãn thêm các điều kiện tồn tại các hằng số $\mu, p > 0$ và $C_1$, $C_2$ sao cho*

$$\Omega(t).t^{-\mu} \leq C_1\Omega(t').t'^{-\mu}, t \leq t'; t, t' \in \prod \quad (2.6)$$

$$\Omega(t).t^{-p} \geq C_2\Omega(t').t'^{-p}, t \leq t'; t, t' \in \prod \quad (2.7)$$

*Khi đó ta có các kết quả sau*

*(i) Nếu $\mu > \frac{1}{p}$ và $p < 2r$ thì một hàm $f \in B^\Omega_{p,\theta}$ có thể biểu diễn thành chuỗi (2.4) thỏa mãn:*

$$B_2(f) \ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \quad (2.8)$$

*(ii) Nếu $p < \min(2r, 2r - 1 + \frac{1}{p})$ một hàm $g$ trên $\prod$ có thể biểu diễn $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} gk = \sum_{k\in\mathbb{Z}+s\in J(k)} \sum c_{k,s}M_{k,s}$ và thỏa mãn:*

$$B_4(g) := \left( \sum \left\{ \|g_k\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty$$

thì $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$ hơn nữa

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \ll B_4(g)$$

*(iii) Nếu* $\mu > \frac{1}{p}$ *và* $p < \min(2r, 2r-1+\frac{1}{p})$ *thì một hàm* $f$ *trên* $\prod$ *thuộc* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *khi và chỉ khi* $f$ *có thể biểu diễn dưới dạng (2.4) thỏa mãn điều kiện (2.8). Hơn nữa khi đó ta có* $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$ *tương ứng với* $B_2(f)$.

Định lý này đã được chứng minh trong [1].

## 3. ĐÁNH GIÁ CHẶN TRÊN

Chúng ta sử dụng một số ký hiệu: $A_n(f) \ll B_n(f)$ nếu $A_n(f) \le C.B_n(f)$ với $C$ là hằng số không phụ thuộc $n$ hoặc $f \in \mathrm{W}; \mathrm{A}_{\mathrm{n}}(f) \approx B_n(f)$ nếu $A_n(f) \ll B_n(f)$ và $B_n(f) \ll A_n(f)$.

Bây giờ ta xem xét tất cả các cách chia đoạn $\prod$ = [0,1] thành các đoạn nhỏ, ký hiệu mỗi cách chia như vậy là $\pi$ và $|\pi|$ là số các đoạn trong $\pi$.$E_m$ là họ tất cả các cách chia $\pi$ của đoạn [0,1] mà $|\pi| \le m.Q(\pi)$ là tập hợp tất cả các hàm $f$ trên $\prod$ sao cho trên mỗi đoạn của $\pi$ thì $f$ là một thức có bậc không quá $2r-1$.$Q_m$ là hợp của các $Q(\pi)$ với $\pi \in E_m$.

**Bổ đề 2.** *Cho* $\bar{k}, k^*$ *là các số nguyên không âm với* $\bar{k} \le k^*$ *và* $\{n_k\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ *là dãy các số nguyên không âm với* $n_k \le |J(k)|, k = \bar{k}+1, ...k^*$ *B là tập tất cả các hàm* $f$ *có dạng*

$$f = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{\bar{k},s} + \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} \sum_{j=1}^{n_k} c_{k,sj} M_{k,sj},$$

*với* $s_j \in J(k)$ *thì* $B \subset Q_m$, *ở đây* $m = 2^{\bar{k}} + 2r \sum_{k=k+1}^{k^*} n_k(k-\bar{k})$.

Bổ đề này đã được chứng minh trong [2].

Cho $\psi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$. Định nghĩa $B^{\{\psi\}}_{p,\theta}$ là không gian tất cả các hàm $f$ trên $\prod$ với chuẩn sau hữu hạn $\|f\|_{B^{\{\psi\}}_{p,\theta}} := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{\psi(k)} \|q_k(f)\|_p \right\}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$

**Bổ đề 3.** *Cho* $0 < p,q,\theta \le \infty, p \ge q$ *và* $\psi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ *khi đó với mọi* $f \in B^{\{\psi\}}_{p,\theta}$, *chúng ta có:*

$$\|f - Q_{\bar{k}}(f)\|_q \ll \|f\|_{B^{\{\psi\}}_{p,\theta}} \cdot \begin{cases} \sup_{k > \bar{k}} 2^{-\psi(k)}, \text{nêu} \theta \le \min(q,1), \\ \left( \sum_{k > \bar{k}} \left\{ 2^{-\psi(k)} \right\}^{\theta^*} \right)^{\frac{1}{\theta^*}}, \text{nêu} \theta > \min(q,1), \end{cases}$$

*ở đây* $\theta^* := \dfrac{1}{\dfrac{1}{\min(q,1_} - \dfrac{1}{\theta}}$.

Bổ đề được chứng minh tổng quát trong [1].

**Định lý 2.** *Cho* $0 < p,q,\theta \le \infty, \Omega(t)$ *là hàm số thỏa mãn các điều kiện ở định lý 1.*

*Ký hiệu* $U^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in B^{\Omega}_{p,\theta}, \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\}$. *Nếu* $\mu > \dfrac{1}{p}, p < 2r$ *thì*

$$r_n\left(U^{\Omega}_{p,\theta}\right)_q \ll \Omega(\frac{1}{n}) \tag{3.1}$$

*Hơn nữa còn có thể xây dựng được tập con B trong* $\sum_n(M)$ *có* $\dim_p(B) \le n$ *và một phương pháp khôi phục* $S^B_n$ *từ (1.1) thỏa mãn*

$$\sup_{f \in U^{\Omega}_{p,\theta}} \left\| f - S^B_n(f) \right\|_q \ll \Omega(\frac{1}{n}) \tag{3.2}$$

*Chứng minh.* Ta có $\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le C.\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}$, nên có thể xem $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\infty}$. Vậy chỉ cần chứng minh (3.2) cho $U := U^{\Omega}_{p,\infty}$.

Ta sử dụng một kết quả đã có là tồn tại $C = C(r,d)$ thỏa mãn $\dim_p(Q_m) \le C.m$. Trường hợp $p \ge q$. Đặt $\Phi = \log\left[\dfrac{1}{\Omega(2^{-1})}\right]$, theo chứng minh ở Định lý 1 (xem [1]) thì $\Phi(k) + C \ge \mu k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Đặt $\Psi(k) = \Phi(k) + C$ khi đó $\psi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$. Với $\bar{k}$ bất kỳ, áp dụng Bổ đề 2 ta có

$$\left\| f - Q_{\bar{k}}(f) \right\|_q \ll \|f\|_{B^{\{\psi\}}_{p,\theta}} \cdot \begin{cases} \sup\limits_{k > \bar{k}} 2^{-\psi(k)}, n\text{êu}\,\theta \le \min(q,1), \\ \left(\sum\limits_{k>\bar{k}} \left\{2^{-\psi(k)}\right\}^{\theta^*}\right)^{\frac{1}{\theta^*}}, n\text{êu}\,\theta > \min(q,1), \end{cases},$$

ở đây $\theta^* := \dfrac{1}{1/\min(q,1) - 1/\theta}$.

Mặt khác

$$\|f\|_{B^{\{\psi\}}_{p,\theta}} = \left( \sum_{k \ge 0} \left\{ 2^{\psi(k)} \left\| q(f) \right\|_p \right\}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$= \left( \sum_{k \ge 0} \left\{ \frac{\left\| q(f) \right\|_p}{\Omega(2^{-k})} \right\}^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le C \ \ (do\ f \in U)$$

$$\sup_{k>\bar{k}} 2^{-\psi(k)} = \sup_{k>\bar{k}} \Omega(2^{-k}) \ll C.\Omega(2^{-\bar{k}})$$

$$\left(\sum_{k>\bar{k}} \left\{2^{-\psi(k)}\right\}^{\theta^*}\right)^{\frac{1}{\theta^*}} = \left(\sum_{k>\bar{k}} \left\{\Omega(2^{-k})\right\}^{\theta^*}\right)^{\frac{1}{\theta^*}}$$

$$= \left(\sum_{k>\bar{k}} \left\{\Omega(2^{-\bar{k}}) 2^{-(k-\bar{k})\mu}\right\}^{\theta^*}\right)^{\frac{1}{\theta^*}} \ll \Omega(2^{-\bar{k}})$$

(vì theo tính chất (2.6) ta có $\Omega(2^{-k}) \le C_1.2^{-(k-\bar{k})\mu}.\Omega(2^{\bar{k}})$).

Như vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức $\sup_{f\in U} \left\| f - Q_{\bar{k}}(f) \right\|_q \ll \Omega(2^{\bar{k}})$.

Số các giá trị lấy mẫu trong $Q_{\bar{k}}(f)$ là $2^{\bar{k}}+1$. Theo Bổ đề 2 (xem [2]) thì $Q_{\bar{k}}(f) \in Q_m$ với $m = 2^{\bar{k}}$. Ta có $\dim_p(Q_m) \le C.m$ với $C$ là hằng số. Xác định $\bar{k}$ thỏa mãn:

$$C'.n < m\max\left\{2^{\bar{k}}+1, C2^{\bar{k}}\right\} \le n.$$

Theo tính chất (i) và (ii) của $\Omega(t)$ suy ra $\Omega(2^{-\bar{k}}) \approx \Omega(\frac{1}{n})$

Từ đó ta xây dựng được $S_n^B(f) = Q_{\bar{k}}(f)$ với $B = Q_m$ thỏa mãn

$$\sup_{f\in U} \left\| f - S_n^B(f) \right\|_q \ll \Omega(\frac{1}{n})$$

Trường hợp $p>q$. Với $f \in U$ ta có $f = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(f) = Q_{\bar{k}}(f) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} q_k(f)$

ở đây $\bar{k}$ bất kỳ và $q_k(f) = \sum_{s\in J(k)} c_{k,s}(f).M_{k,s}$.

Từ (2.8), suy ra $\left\| q_k(f) \right\|_p \approx 2^{-\frac{k}{p}} \left\| \left\{c_{k,s}(f)\right\} \right\|_{p,k} \ll \Omega(2^{-k}), \forall k \ge 0$.

Đặt $m_k = \left|J(k)\right| = 2^k + 2r - 1, \bar{k}, k^*$ các số nguyên không âm với $\bar{k} < k^*$ và $\left\{n_k\right\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ là dãy các số nguyên không âm thỏa mãn $n_k < m_k$.

Chúng ta xây dựng phương pháp khôi phục

$$G(f) := Q_{\bar{k}}(f) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} G_k(q_k(f)), \qquad (3.3)$$

là thành phần tuyến tính không thích nghi của $G(f)$, thành phần phi tuyến thích nghi được xây dựng là tổng của các thuật toán tham lam $G_k$. với mỗi $k = \bar{k}+1, ...k^*$ thì $Q_k(q_k(f))$ được xác định như sau:

Dãy $\left\{c_{k,s}(f)\right\}_{s\in J(k)}$ được sắp xếp: $\left|c_{k,s_1}(f)\right| \geq \left|c_{k,s_2}(f)\right| \geq ... \geq \left|c_{k,s_{m_k}}(f)\right|$, khi đó $k = \overline{k}+1,...k^*$ và đặt $\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, ta có:

$$\left\|q_k(f) - G_k(q_k(f)\right\|_q = \left\| \sum_{j=n_k+1}^{m_k} c_{k,s_j} \right\|_q \approx 2^{-\frac{k}{q}}.\left( \sum_{j=n_k+1}^{m_k} \left|c_{k,s_j}\right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq 2^{-\frac{k}{q}} n_k^{-\delta} \left( \sum_{j=1}^{m_k} \left|c_{k,s_j}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ll 2^{\delta k} n_k^{-\delta} \left\|q_k(f)\right\|_p \ll 2^{\delta k} n_k^{-\delta}.\Omega(2^{-k}) \qquad (3.4)$$

Bây giờ xét với $k > k^*$

$$\left\|q_k(f)\right\|_q = 2^{-\frac{k}{q}} \left( \sum_{s\in J(k)} \left|c_{k,s}\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{-\frac{k}{q}} \left( \sum_{s\in J(k)} \left|c_{k,s}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \approx 2^{\delta k}.\left\|q_k(f)\right\|_p \leq 2^{\delta k}.\Omega(2^{-k}) \qquad (3.5)$$

Xét ánh xạ $G: U \to B$ được xác định (3.3), $B$ là tập hợp được xác định trong Bổ đề 2 (xem [2]) thì $G(f) \in B$.

Cũng theo Bổ đề 2 ta có $B \in Q_m$ với $m = 2^{\overline{k}} + 2r \sum_{k=\overline{k}+1}^{k^*} n_k(k-\overline{k})$. Do $\dim_p(Q_m) \leq C.m$ nên $\dim_p(B) \leq C.m$. Chúng ta xác định $\overline{k}, k^*$, dãy $\left\{n_k\right\}$ với $n_k \leq m_k$ như sau:

a) $\overline{k}$ xác định bởi $C_1.2^{\overline{k}} \leq n \leq C_2.2^{\overline{k}}$, với các hằng số $C_1, C_2$ được chọn sau cho phù hợp.

b) Số giá trị lấy mẫu của $G(f)$ không vượt quá

$$m' = (2^{\overline{k}} + 1) + (2\mu + 2r) \sum_{k=\overline{k}+1}^{k^*} n_k$$

c) Cố định $\varepsilon$ thỏa mãn $0 < \varepsilon < \frac{\mu - \delta}{\delta}$

Chúng ta có thể lựa chọn $k^*$ và dãy $\left\{n_k\right\}_{k=\overline{k}+1}^{k^*}$ là $k^* = \left[\varepsilon^{-1}\log(\lambda n)\right] + \overline{k} + 1$ và $n_k = \left[\lambda n.2^{-\varepsilon(k-\overline{k})}\right], k = \overline{k}+1,...,k^*$.

Khi đó $C_1, C_2, \lambda$ được xác định sao cho $n_k \leq m_k, k = \overline{k}+1,...,k^*, C.m \leq n, m' \leq n.$

Mặt khác với mỗi $\tau$ cố định thỏa mãn $0 < \tau < \min(q,1)$.

Từ (3.4), (3.5) và (2.3) thì $\forall f \in U$ ta có:

$$\begin{aligned}
\left\|f - S_n^B(f)\right\|_q^\tau &\le \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} \left\|q_k(f) - G_k(q_k(f))\right\|_q^\tau + \sum_{k>k^*} \left\|q_k(f)\right\|_q^\tau \\
&\ll \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} 2^{\tau.\delta k}.n_k^{-\delta\tau}.\Omega^\tau(2^{-k}) + \sum_{k>k^*} 2^{\tau.\delta k}.\Omega^\tau(2^k) \\
&\ll \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} 2^{\tau.\delta k}.n_k^{-\delta\tau}.2^{\varepsilon.\delta\tau.(\bar{k}-k)}.2^{\tau.(\bar{k}-k)\mu}.\Omega^\tau(2^{2-\bar{k}}) \\
&+ \sum_{k=k^*+1}^{\infty} 2^{\tau.\delta k}.2^{\tau(k^*-k)\mu}.\Omega^\tau(2^{-k^*}) \\
&\ll \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} 2^{\tau(k-\bar{k})(\varepsilon\delta-\mu+\delta)}.\Omega^\tau(2^{-\bar{k}}) \\
&+ \sum_{k=k^*+1}^{\infty} 2^{\tau(k^*-k)(\mu-\delta)}.2^{\tau\delta k^*}.\Omega^\tau(2^{-k^*}) \\
&\ll \Omega^\tau(\frac{1}{n}) + 2^{\tau\delta k^*}\Omega^\tau(2^{-k^*})(do\ \varepsilon\delta - \mu + \delta < 0, \mu - \delta > 0) \\
&\ll \Omega^\tau(\frac{1}{n}) + (2^{\delta k^*}.\Omega(2^{-k^*}))^\tau,
\end{aligned}$$

mà $k^* = \left[\varepsilon^{-1}\log(\lambda n)\right] + \bar{k} + 1$, suy ra $2^{\delta k^*} \approx n^{(1+\frac{1}{\varepsilon})\delta}$

và $\Omega(2^{-k^*}) \ll 2^{-(k^*-\bar{k})\mu}.\Omega(2^{-\bar{k}}) \approx n^{\frac{-\mu}{\varepsilon}}.\Omega(2^{-\bar{k}}) \approx n^{\frac{-\mu}{\varepsilon}}\Omega(\frac{1}{n})$

nên $2^{\delta k^*}\Omega(2^{-k^*}) \ll n^{(1+\frac{1}{\varepsilon})\delta} n^{\frac{-\mu}{\varepsilon}}.\Omega(\frac{1}{n}) \ll n^{\delta+\frac{\delta-\mu}{\varepsilon}}.\Omega(\frac{1}{n}) \ll \Omega(\frac{1}{n})$.

Vì vậy $\left\|f - S_n^B(f)\right\|_q \ll \Omega(\frac{1}{n})$.

Như vậy (3.2) đã được chứng minh và do đó (3.1) được chứng minh.

Để đánh giá cận trên của $s_n\left(U_{p,\theta}^\Omega, M\right)$ chúng ta vẫn sử dụng phương pháp xây dựng, cách xác định $\bar{k}, k^*, \{n_k\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ như trên. Khi đó vẫn tìm được các hằng số $C', C_1, C_2$ và $\lambda$ thỏa mãn điều kiện: số các B - spline $M_{k,s}$ trong $S_n^B$ ở các trường hợp $p \ge q$ và $p<q$ lần lượt là $\left(2^{\bar{k}} + 2r - 1\right)$ và $\left(2^{\bar{k}} + 2r - 1\right) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} n_k$ không vượt quá $n$.

Từ đó ta có định lý sau:

**Định lý 3.** Cho $0 < p, q, \theta \le \infty, \Omega$ thỏa mãn điều kiện ở Định lý 1, $\mu > \frac{1}{p}, p < 2r$.

Khi đó ta có: $s_n\left(U_{p,\theta}^\Omega, M\right)_q \ll \Omega(\frac{1}{n})$

## 4. KẾT LUẬN

Bằng việc biểu diễn một hàm $f \in W \subset L_q(\prod)$, $0 < q \le \infty$ qua sóng nhỏ giả nội suy trong không gian Besov: $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}+} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f).M_{k,s}$ ,

chúng tôi đã xây dựng được phương pháp khôi phục thích nghi lấy mẫu $S_n^B$, có các sai số là tốt nhất có thể, cụ thể là với hàm số $\Omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện cho trước thì

$$\sup_{f \in U_{p,\theta}^{\Omega}} \left\| f - S_n^B(f) \right\|_q \ll \Omega(\frac{1}{n}).$$

Hơn nữa, ta có

$$r_n\left(U_{p,\theta}^{\Omega}\right)_q \ll \Omega(\frac{1}{n}) \text{ và } s_n\left(U_{p,\theta}^{\Omega}, M\right)_q \ll \Omega(\frac{1}{n}).$$

Ở đây $U_{p,\theta}^{\Omega} = \left\{ f \in B_{p,\theta}^{\Omega}, \|f\|_{B_{p,\theta}^{\Omega}} \le 1 \right\}$.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Birman, M.S., Solomjak, M.Z. (1967), *Piecewise-polynomial approximations of the class,* Math. USSR- Sb. 2(3), 295-317.

[2] C.K. Chui (1992), *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York.

[3] C.K. Chui, H. Diamond (1987), *A natural formulation of quasi-interpolation by multivariate splines*, Proc. Amer. Math. Soc. 99, 643-646.

[4] C. de Boor, G.J. Fix (1973), *Spline approximation by quasi-interpolants*, J. Approx, Theory 8, 19-45.

[5] C. de Bore, K. Hollig, S. Riemenschneider (1993), *Box Spline, Springer-Verlag-Berlin*.

[6] Dinh Dung (2009), *Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wevelet representations*, Adv. Comput. Math, 30, 375-401.

[7] Dinh Dung (2011), *Optimal adaptive sampling recovery*, Adv. Comput, Math, 31, 1-41.

[8] Dinh Dung (2012), *Erratum to: Optimal adaptive sampling recovery*, Adv. Comput. Math, 36, 605-606.

[9] Dinh Dung, *Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasi-interpolation*, accepted for publication in Found. Comp. Math.

[10] A.N. Kolmogorov, V.M. Tikhomirov (1959), *-entropy and -capacity of sets in function space*, Uspekhi Mat. Nauk 14, 3-86; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 17(1961).

[11] J. Ratsaby, V. Maiorov (1998), *The degree of approximation of sets in Euclidean space using sets with bounded Vapnik-Chervoekis dimension*, Discrete Applied Math. 86, 81-93.

[12] J. Ratsaby, V. Maiorov, (1999), *On the degree of approximation by manifolds of finite pseudo-dimension*, Constr. Approx. 15, 291-300.

# APPROXIMATE RECOVERY OF FUNCTIONS IN BESOV-TYPE SPACES WITH B-SPLINES

**Nguyen Manh Cuong, Mai Xuan Thao**

ABSTRACT

*In this paper, we will extend results obtained by Dinh Dung on optimal methods of adaptive sampling recovery of functions by sets of finite capacity to univariate Besov-type spaces of functions with B-splines.*

**Keywords:** *Adaptive sampling recovery, Quasi-interpolant representations, Besov-type spaces.*

# TỔNG HỢP VẬT LIỆU NANO $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ VÀ THỬ NGHIỆM XỬ LÝ CHẤT THẢI CHỨA DẪN XUẤT HALOGEN

**Trịnh Đình Định[1], Trần Thị Huyền[2], Tống Văn Giang[3], Trần Thị Thảo[4], Nguyễn Đức Minh[5], Trịnh Lan Hồng[6]**

TÓM TẮT

*Tổng hợp vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ bằng phương pháp sol-gel từ tiền chất $Zn(CH_3CO_3)_2.2H_2O$; $Ni(NO_3)_2.6H_2O$; $Cr(NO_3)_3.9H_2O$ khi có mặt triethanolamine (TEA). Đã xác định thành phần pha, kích thước hạt, hình thái học, thành phần hóa học bằng phương pháp X-ray, SEM, EDX. Kết quả, vật liệu $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ có một số tính chất như kích thước hạt nano trong khoảng 10 nm đến 50 nm, tỷ lệ phần trăm nguyên tử giữa Zn, Ni và Cr là 65,1:23,8:11,1; tinh thể $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ tồn tại ở dạng wurtzite của Zn, vật liệu có khả năng phân hủy monochlorobenzene nhanh, ngay cả ở vùng nhiệt độ thấp và có độ chuyển hóa cao hơn (đạt 84,58% tại $400^0C$).*

**Từ khóa:** *Nano NiO/Cr2O3/ZnO, phân hủy monochlorobenzene, phương pháp sol-gel.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Những năm gần đây sự phát triển mạnh mẽ của khoa học công nghệ, trong đó có rất nhiều phương pháp tổng hợp vật liệu nano để xử lý chất thải nhiễm chất hữu cơ khó phân hủy, những phương pháp truyền thống và những phương pháp mới như: Phương pháp ngưng tụ pha hơi, đồng kết tủa, nhiệt phân, thủy phân, điện kết tủa, phản ứng sol-gel... [1], [2]. Tuy nhiên, điều quan trọng nhất trong tổng hợp vật liệu nano là kiểm soát kích thước và sự phân bố theo kích thước của các cấu tử hay các pha tạo thành, phương pháp oxi hóa nâng cao đã được nghiên cứu thay thế phương pháp truyền thống để xử lý chất thải nhiễm chất hữu cơ khó phân hủy dựa trên các loại vật liệu nano như: nano ZnO, hệ nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$, $ZnO/V_2O_5$, $ZnO/Al_2O_3$... phương pháp này đã thu được kết quả đầy hứa hẹn trong vấn đề xử lý chất thải nhiễm monochlorobenzene [3], [4], [5]. Tuy nhiên, việc sử dụng nano ZnO vẫn còn hạn chế do nano ZnO sạch chỉ phát huy được khả năng xúc tác trong khoảng nhiệt độ cao hơn 500ºC [6], [7], [8]. Để tiết kiệm năng lượng, đặc biệt là giảm nhiệt độ trong quá trình xử lý monochlorobenzene và đạt hiệu quả cao hơn, cần mở rộng phổ hấp thụ dẫn xuất monochlorobenzene của ZnO. Để giải quyết vấn đề nêu trên chúng tôi thực hiện đề tài *"Tổng hợp vật liệu $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ kích thước nano và ứng dụng xử lý chất thải chứa monochlorobenzene"*.

[1,3,4,5] *Công ty Cổ phần Công nông nghiệp Tiến Nông, Thanh Hóa*
[2,6] *Giảng viên khoa Nông - Lâm - Ngư nghiệp, Trường Đại học Hồng Đức*

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Vật liệu và phương pháp nghiên cứu

*2.1.1. Hóa chất, thiết bị*

*Hóa chất:* $Zn(CH_3CO_3)_2.2H_2O$ (>99%); $Ni(NO_3)_2.6H_2O$ (>99%); $Cr(NO_3)_3.9H_2O$ (>99%), $HNO_3$ 86% (AR), NaOH (>96%) (AR), $CH_3COCH_3$ (>99%).

*Thiết bị sử dụng:* Cân phân tích (độ chính xác ± 0,0001 g), máy khuấy từ IKA (Mỹ), tủ sấy ($20^0$C đến $300^0$C), lò nung Lenton (Anh, nhiệt độ từ $20^0$C đến $1200^0$C), máy đo pH.

*2.1.2. Phương pháp nghiên cứu*

*2.1.2.1. Tổng hợp vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$*

Vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ được tổng hợp bằng phương pháp sol-gel. Dung dịch $Zn(CH_3COO)_2$ 0,5M; $Ni(NO_3)_2$ 0,5M; $Cr(NO_3)_3$ 0,5M đã được chuẩn bị. Lấy 20ml $Zn(CH_3COO)_2$, 10ml $Cr(NO_3)_3$ và 5ml $Ni(NO_3)_2$ cho vào cốc chịu nhiệt, thêm 1ml dung dịch TEA khuấy đều bằng máy khuấy từ thu được dung dịch đồng nhất A. Nhỏ từng giọt dung dịch NaOH 2M vào dung dịch A, khuấy mạnh (1000 vòng/ phút) đến khi pH = 9, quá trình thủy phân diễn ra thu được dạng sol. Tiếp tục khuấy đều và gia nhiệt cho dung dịch ở nhiệt độ $80^0$C trong một giờ, sau đó để yên trong 24 giờ để chuyển từ dạng sol sang dạng gel màu tím nhạt. Hỗn hợp dạng gel tạo thành được lọc, rửa nhiều lần bằng nước cất để loại bỏ muối của $Na^+$ và các ion tan khác, sấy khô trong 10 giờ ở nhiệt độ $105^0$C. Sản phẩm nung ở nhiệt độ $450^0$C; $500^0$C; $550^0$C và $600^0$C trong thời gian 2 giờ thu được vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$.

*2.1.2.2. Tính chất và khả năng phân hủy monochlorobenzene của nano NiO/Cr2O3/ZnO*

*Tính chất của vật liệu*

Dạng thù hình của tinh thể $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ được xác định bằng phương pháp đo phổ nhiễu xạ tia X (X-ray) trên thiết bị Brucker D8 - Advance của Đức, nguồn phát xạ Cu $K_\alpha$, kính lọc tinh thể đơn sắc, đệm chuẩn bằng $Al_2O_3$, tốc độ quay $3,03^0/0,5$s.

Thành phần nguyên tố xác định bằng phương pháp đo phổ tán xạ năng lượng tia X (EDX). Hình thái của vật liệu được khảo sát bằng phương pháp kính hiển vi điện tử quét (SEM).

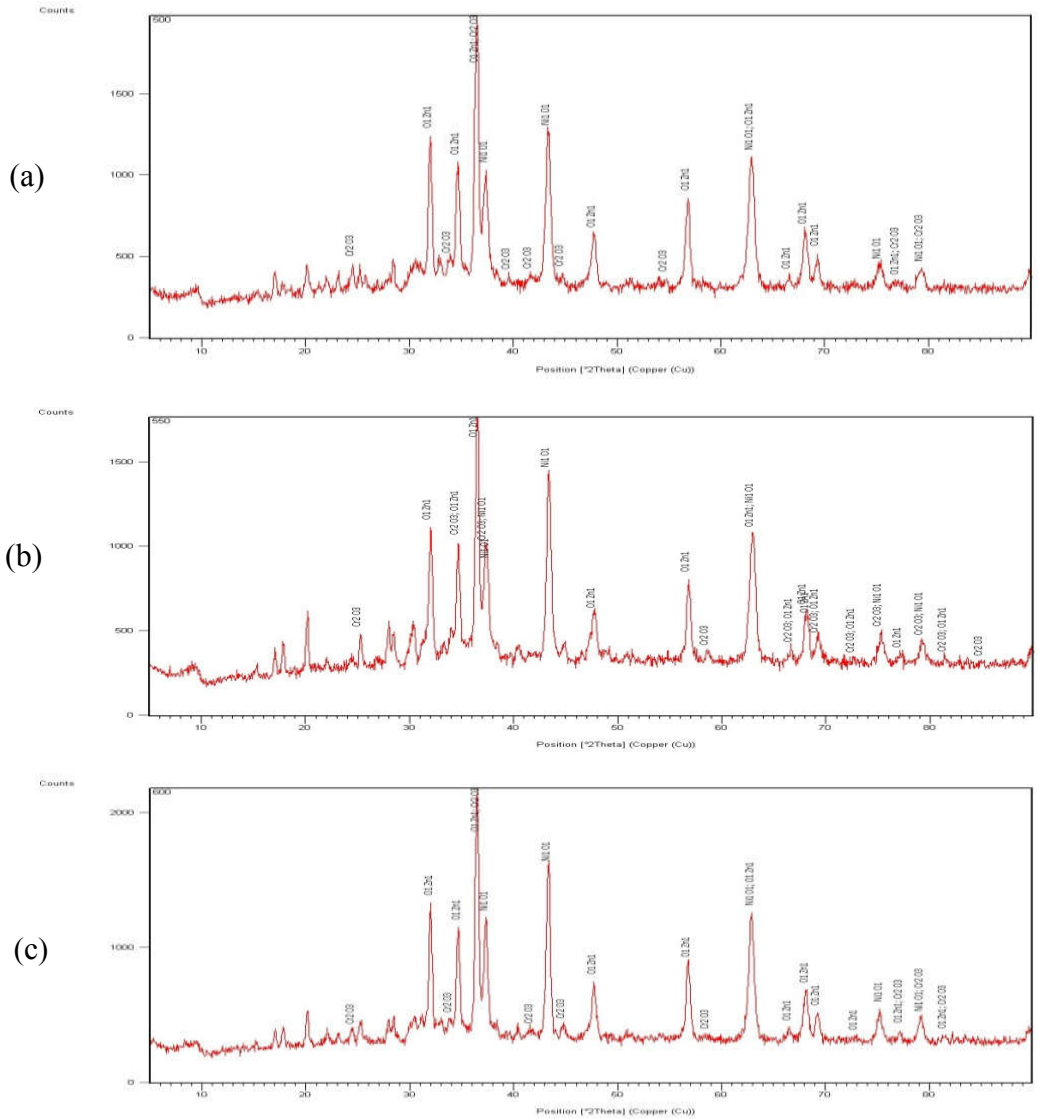
*Khả năng xúc tác của vật liệu*

Khả năng xúc tác của vật liệu nano được xác định bằng phương pháp sắc kí khối phổ GC-MS. Mỗi một nhiệt độ nghiên cứu, mẫu được bơm trực tiếp 3 lần vào máy sắc kí đảm bảo sai số với giá trị dùng cho tính toán hiệu suất là gia trị chiều cao trung bình pic sắc kí trên gian đồ của ba lần bơm. Xúc tác được khảo sát từ nhiệt độ 200 ÷ 800$^o$C, hiệu suất chuyển hóa monochlorobenzene được so sánh với nồng độ monochlorobenzene tại 30$^o$C không qua xúc tác (gọi là nồng độ $C_0$ - chiều cao pic $H_0$).

### 2.2. Kết quả và thảo luận

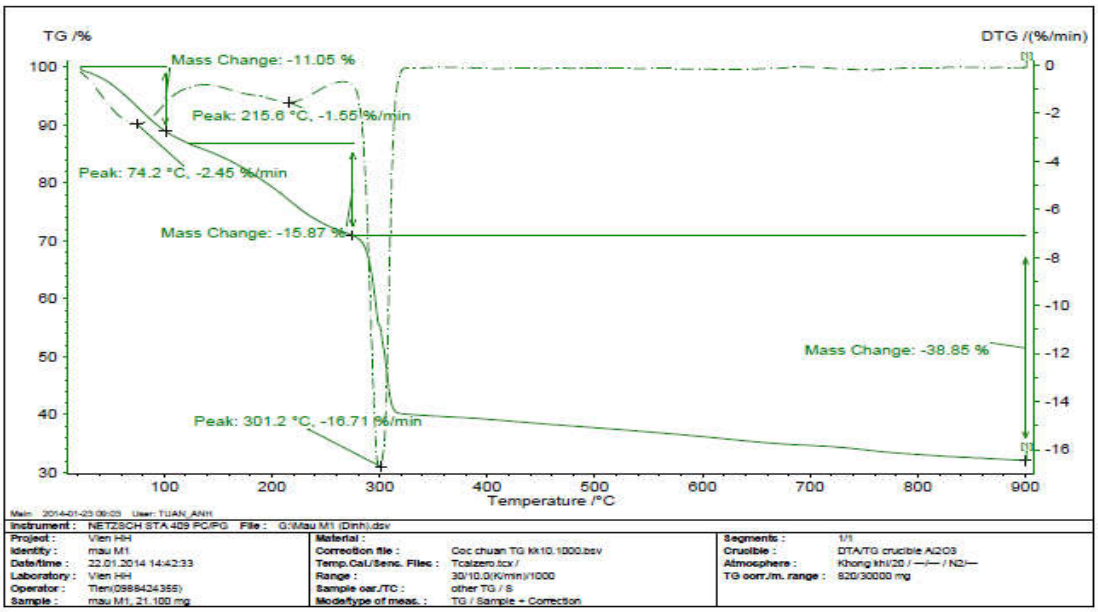
*2.2.1. Tính chất của vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$*

Hình 1 cho thấy, đặc trưng thành phần pha và cấu trúc của vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ tổng hợp được sau khi nung ở các nhiệt độ $500^0C$, $550^0C$ và $600^0C$.



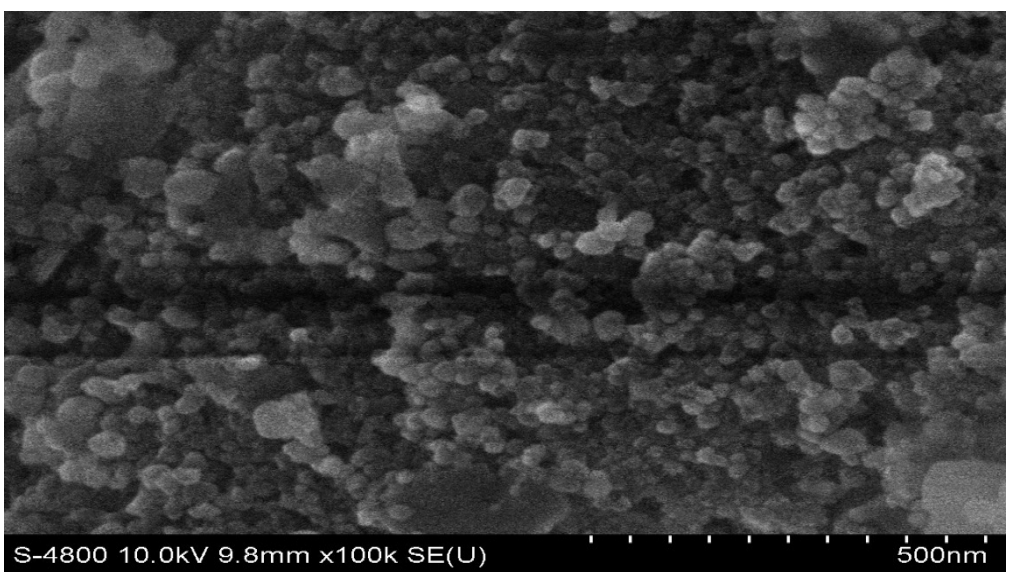

**Hình 1. Giản đồ nhiễu xạ tia X mẫu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ nung ở nhiệt độ $500^0C$ (a); $550^0C$ (b) và $600^0C$ (c)**

Từ giản đồ X-ray ta thấy mẫu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ có cấu trúc và thành phần pha tương đối ổn định ở các nhiệt độ khác nhau, điều này chứng tỏ nhiệt độ nung không ảnh hưởng đáng kể đến cấu trúc cũng như thành phần pha của vật liệu. Kết quả cũng cho biết vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ có kích thước trung bình khoảng 20nm. Kết quả này phù hợp với kết quả đo ảnh SEM của vật liệu tổng hợp được thể hiện trên hình 2.



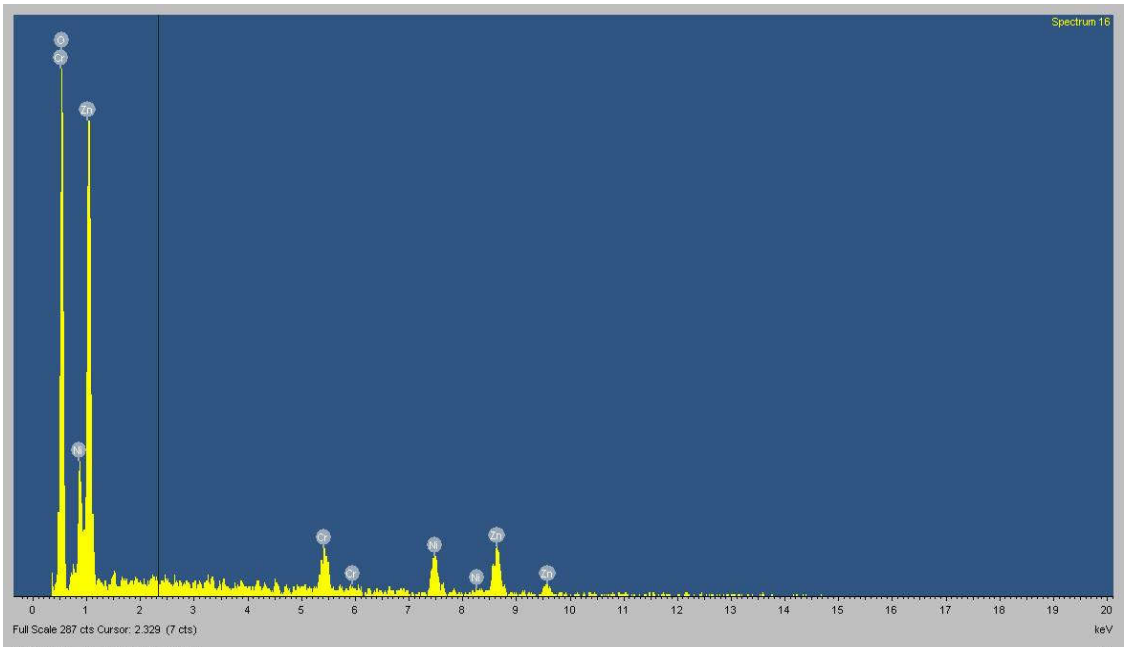

**Hình 2. Giản đồ TGA của vật liệu nano NiO/$Cr_2O_3$/ZnO**

Từ hình 2 ta thấy, hệ xúc tác có khối lượng tương đối ổn định từ khoảng nhiệt độ lớn hơn 350$^o$C. Vì vậy, tác giả lựa chọn khoảng nhiệt độ từ 400$^o$ ÷ 700$^o$C để khảo sát sự ảnh hưởng của nhiệt độ đến hình thái học của vật liệu tổng hợp.




**Hình 3. Ảnh SEM của mẫu vật liệu nano NiO/$Cr_2O_3$/ZnO**

Hình 3 ta thấy, vật liệu nano NiO/$Cr_2O_3$/ZnO được nung ở nhiệt độ 550$^o$C có kích thước hạt khá đồng so với các mẫu ở nhiệt độ nung khác và có kích thước khoảng 10 ÷ 50nm. Vì vậy, tác giả lựa chọn nhiệt độ nung là 550$^o$C sử dụng trong đề tài nghiên cứu cho các khảo sát tiếp theo của vật liệu.




**Hình 4. Giản đồ EDX mẫu vật liệu nano NiO/$Cr_2O_3$/ZnO**

Hình 4 là phổ EDX và bảng 1 thành phần nguyên tố của mẫu nano ZnO/$Cr_2O_3$/NiO nung ở 550$^o$C cho thấy sự có mặt các nguyên tố trong mẫu như: C, O, Zn, Ni, Cr. Nguyên tố Zn, Ni, Cr và O là các nguyên tố đưa vào để tổng hợp vật liệu, sự có mặt của nguyên tố C trong mẫu cao một phần có thể là do quá trình rửa chưa loại bỏ hết TEA, phần khác là do quá trình lọc mẫu bị lẫn với giấy lọc quá trình nung bị phân hủy tạo thành C.

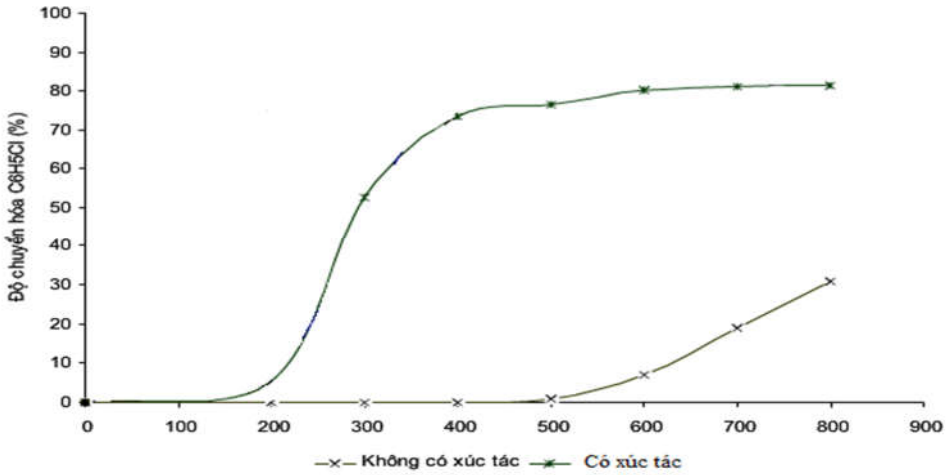
**Bảng 1. Thành phần các nguyên tố trong mẫu vật liệu**

| Nguyên tố | Phần trăm khối lượng | Phần trăm nguyên tử |
|---|---|---|
| C | 17,57 | 33,85 |
| O | 33,03 | 47,79 |
| Cr | 4,59 | 2,04 |
| Ni | 11,12 | 4,38 |
| Zn | 33,70 | 11,93 |

Bảng 1 cho thấy, tỷ lệ phần trăm nguyên tử giữa Zn, Ni và Cr trong hỗn hợp là 11,93:4,38:2,04 (tương ứng tỷ lệ 65,1:23,8:11,1 at%). Như vậy, với điều kiện tổng hợp như trên đã chế tạo được vật liệu nano ZnO/$Cr_2O_3$/NiO trong đó tỷ lệ phần trăm nguyên tử giữa Zn, Ni và Cr là 65,1:23,8:11,1 có thành phần pha ở dạng wurtzite của Zn, kích thước hạt từ 10nm đến 50nm.

*2.2.2. Khả năng phân hủy monochlorobenzene của vật liệu NiO/$Cr_2O_3$/ZnO*

Khoảng nhiệt độ nghiên cứu lựa chọn từ 200$^0$C đến 800$^0$C, kết quả khảo sát được chuyển hóa monochlorobenzene được trình bày ở hình 5.

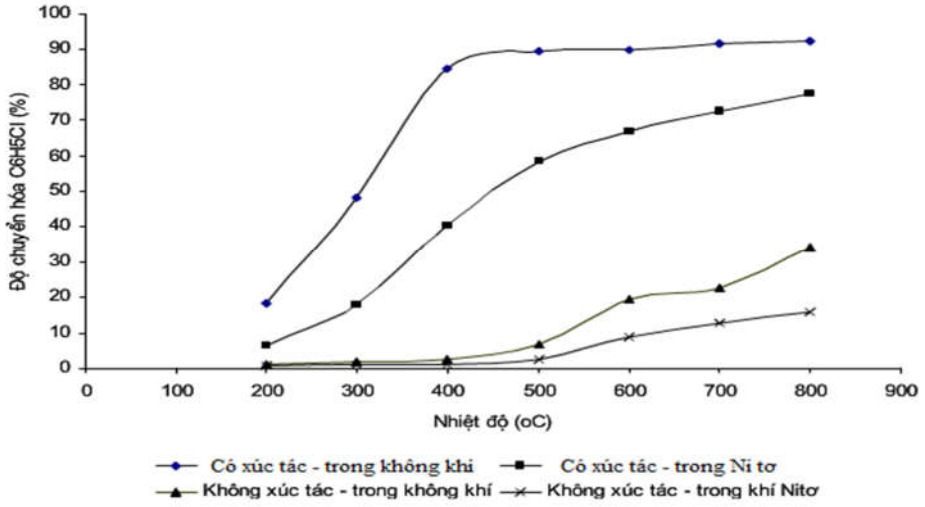



**Hình 5. Đồ thị sự phụ thuộc độ chuyển hóa monochlorobenzene trên xúc tác đến nhiệt độ**

Kết quả trong hình 5 ta thấy, trong điều kiện không có xúc tác, trong môi trường không khí, độ chuyển hóa của monochlorobenzene diễn ra rất chậm, chỉ đạt 7,14% ở $600^0$C và 31% ở $800^0$C. Như vậy, monochlorobenzene rất bền trong điều kiện oxy hóa thông thường hầu như không biến đổi dưới tác dụng của oxy không khí và nhiệt độ cao.

Khi có mặt xúc tác thì độ chuyển hóa monochlorobenzene xảy ra nhanh, ngay cả ở vùng nhiệt độ thấp và có độ chuyển hóa cao hơn (đạt 84,58% tại $400^0$C).

### 3.3. Ảnh hưởng của môi trường phản ứng đến quá trình phân hủy monochlorobenzene




**Hình 6. Độ chuyển hóa monochlorobenzene trong môi trường không khí và nitơ**

Hình 6 cho thấy, khi có mặt xúc tác trong môi trường không khí chuyển hóa tăng nhanh đạt 84,58% tại $400^0$C và gần như ít thay đổi nếu ta tiếp tục tăng nhiệt độ phản ứng. Còn trong môi trường nitơ, quá trình chuyển hóa của monochlorobenzene có xảy ra nhưng với hiệu suất

chuyển hóa thấp so với môi trường không khí, đạt giá trị 77,5% tại nhiệt độ $800^0$C. Như vậy, với sự có mặt của xúc tác đã làm tăng quá trình chuyển hóa monochlorobenzene trong quá trình xử lý hơi monochlorobenzene.

## 4. KẾT LUẬN

Vật liệu nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ được tổng hợp từ các tiền chất là $Zn(CH_3COO)_2.2H_2O$, $Cr(NO3)_3.9H_2O$ và $Ni(NO_3)_2.6H_2O$ với điều kiện lựa chọn phù hợp như nhiệt độ nung mẫu 550$^o$C, thời gian nung 2 giờ có kích thước trong khoảng 10 ÷ 50nm, tỷ lệ phần trăm nguyên tử giữa Zn, Ni và Cr là 65,1 : 23,8 : 11,1; tinh thể $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ tồn tại ở dạng wurtzite của Zn tinh thể tồn tại ở dạng pha > 90% và đảm bảo các chỉ tiêu kỹ thuật, có khả năng ứng dụng trong xử lý môi trường. Ứng dụng xử lý chất thải hữu cơ có chứa monochlorobenzene với xúc tác NiO/Cr2O3/ZnO dạng bột cho hiệu quả tốt với điều kiện nhiệt độ 400$^o$C đạt 84,58%.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Lâm Vĩnh Ánh (2002), *Nghiên cứu công nghệ xử lý chất độc quân sự và hóa chất độc họ cơ clo bằng phương pháp thiêu đốt có mặt của phụ gia và xúc tác*, Hà Nội.

[2] Báo cáo khoa học (2005), *Hội nghị xúc tác và hấp phụ toàn quốc lần thứ III - 2005*, Hội xúc tác và hấp phụ VN.

[3] Báo cáo khoa học (2003), *Công nghệ mới - công nghệ nano,* Tổng luận khoa học - công nghệ - kinh tế, trung tâm thông tin tư liệu khoa học công nghệ Quốc gia, số 1.

[4] Nguyễn Hữu Đính, Trần Thị Đà (1999) *Ứng dụng một số phương pháp nghiên cứu cấu trúc phân tử*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[5] Nguyễn Đức Nghĩa (2007), *Hóa học nano*, Nxb. Khoa học Tự nhiên và Công nghệ Hà Nội.

[6] Nguyễn Việt Thái (2005), Tài liệu hội thảo: *Vật liệu nano và một số ứng dụng trong quốc phòng*, Học viện Kỹ thuật quân sự, Hà Nội.

[7] Nguyễn Đình Triệu (2002), *Các phương pháp phân tích vật lý và hóa lý tập 1,2*. Nxb. Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.


# SYNTHESIS NANO MATERIAL OF $NIO/CR_2O_3/ZNO$ AND ITS APPLICATION FOR HALOGEN DERIVATIVE TREATMENT

**Trinh Dinh Dinh, Tran Thi Huyen, Tong Van Giang, Tran Thi Thao, Nguyen Duc Minh, Trinh Lan Hong**

## ABSTRACT

*The nanoscale material of $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ was synthesized by sol-gel method, using several chemicals of $Zn(CH_3CO_3)_2.2H_2O$; $Ni(NO_3)_2.6H_2O$; $Cr(NO_3)_3.9H_2O$ with the triethanolamine (TEA). The particle size, morphology, chemical composition of this*

*nanoscale material were diternined by X-ray, SEM, EDX. The experimental results showed that the synthesis of $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ nanoscale material had some properties such as nanoparticle size in the range of 10 nm to 50 nm, the atomic propotion of Zn, Ni and Cr is 65.1: 23.8: and 11,1 respectively; $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ crystals exist in the wurtzite form of Zn, which was capable of rapid decomposing monochlorobenzene even at lower temperatures and with higher conversion (84.58% at 400°C).*

**Keywords:** *Nano $NiO/Cr_2O_3/ZnO$, monochlorobenzene decomposition, sol-gel method.*

# BẤT BIẾN CỦA GIỚI HẠN THUẬN QUA PHÉP LẤY THƯƠNG

**Phạm Thị Bích Hà[1], Lê Xuân Dũng[2]**

TÓM TẮT

*Bài báo chứng minh giới hạn thuận được bảo toàn qua phép lấy thương đối với hệ thuận tổng quát. Đây là sự mở rộng một số kết quả xét trên một số hệ thuận đặc biệt của J. J. Rotman.*

**Từ khóa:** *Giới hạn thuận, A-môđun trái.*

## 1. GIỚI THIỆU

Cho $R$ là một vành và $\{M_i\}_{i\in I}$ là họ các $R$-môđun trái (gọi tắt là $R$-môđun) trên tập sắp thứ tự bộ phận $I$. Giới hạn thuận của $\{M_i\}_{i\in I}$ luôn tồn tại (xem trong [3], [5], [6]). Ngay sau khi ra đời các khái niệm này có những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Đại số và Hình học đại số, chẳng hạn đối với Đại số giao hoán trong [4, Section 1] đưa ra cách tính môđun đối đồng địa phương thông qua tính giới hạn thuận. Để phát huy hiệu quả ứng dụng của khái niệm giới hạn thuận trong các lĩnh vực khác, các nhà toán học quan tâm nghiên cứu đến cấu trúc và tính bất biến của giới hạn thuận qua một số phép toán (xem trong [1], [2], [3], [4]).

Mục đích chính của bài báo này là mở rộng các kết quả của phép lấy giới hạn thuận qua phép lấy thương của J. J. Rotman [5, Section 5.2].

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 xây dựng một hệ thuận mới từ hai hệ thuận ban đầu (Mệnh đề 2.4). Mục 3 trình bày kết quả chính của bài báo về tính bất biến của giới hạn thuận qua phép lấy thương (Định lý 3.4) và khi xét hai hệ thuận đặc biệt ta nhận được các kết quả của J. J. Rotman [5, Section 5.2] (Hệ quả 3.5, Hệ quả 3.6).

## 2. HỆ THUẬN

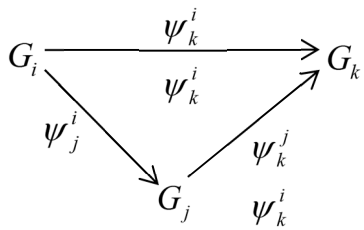
Trong bài viết luôn giả thiết $R$ là vành và M là $R$-môđun trái (gọi tắt là $R$-môđun). Giả sử $I$ là một tập sắp thứ tự bộ phận, không mất tính tổng quát ta kí hiệu quan hệ đó là "$\leq$". Một tập sắp thứ tự bộ phận $I$ được gọi là một tập định hướng nếu với mọi $i, j \in I$ luôn tồn tại $k \in I$ sao cho $i \leq k$ và $j \leq k$.

**Định nghĩa 2.1.** Giả sử $\{G_i\}_{i\in I}$ là một họ các $R$-môđun và $I$ là một tập tựa sắp thứ tự bộ phận. $\{G_i\}_{i\in I}$ gọi là một hệ thuận các $R$-môđun ứng với tập chỉ số $I$ nếu với mọi $i, j \in I$ sao cho $i \leq j$ luôn tồn tại một đồng cấu $\psi_j^i : G_i \to G_j$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

[1, 2] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

$\psi_i^i : G_i \to G_i$ là đồng cấu đồng nhất với mọi $i \in I$.

Nếu $k \in I$ sao cho $i \le j \le k$ thì $\psi_k^i = \psi_k^j . \psi_j^i$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:




Hệ thuận được định nghĩa như trên kí hiệu là $G = \left\{G_i, \psi_j^i\right\}$.

**Ví dụ 2.2.** Cho dãy các môđun con của $R$-môđun $M$ như sau:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$$

Khi đó, ta có họ $\left\{M_i, \psi_j^i (i \le j)\right\}_{\mathbb{N}}$ là hệ thuận trên tập định hướng $\mathbb{N}$, trong đó $\psi_j^i : M_i \to M_j$ là phép nhúng từ $M_i$ vào $M_j$.

**Ví dụ 2.3.** Đặt $\Gamma = \{\text{A} \mid \text{A là môđun con của } M\}$. Theo [3, Ví dụ 2.5], ta xem $\Gamma$ là tập chỉ số trên chính nó và họ $\left\{A, \phi_{A'}^A, A \subseteq A'\right\}_\Gamma$ là hệ thuận trên tập định hướng $\Gamma$.

Giả sử $M, N$ là các $R$-môđun sao cho tồn tại một đơn cấu các $R$-môđun $f : N \to M$. $\left\{A_i, \phi_{j'}^i (i \le j)\right\}_{\mathfrak{M}}$ và $\left\{B_u, \varphi_v^u (u \le v)\right\}_{\mathfrak{N}}$ lần lượt là các hệ thuận các môđun con tương ứng của $M$ và $N$ trên các tập định hướng $\mathfrak{M}$ và $\mathfrak{N}$, trong đó $\phi_j^i$ và $\varphi_v^u$ là các phép nhúng. Giả sử hai họ $\mathfrak{A} = \left\{A_i, \phi_{j'}^i (i \le j)\right\}_{\mathfrak{M}}$ và $\mathfrak{B} = \left\{B, \varphi_v^u (u \le v)\right\}_{\mathfrak{N}}$ thỏa mãn tính chất sau: với mọi $u \in \mathfrak{N}$ tồn tại $i \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_u) \subseteq A_i$. Khi đó ta có thể xây dựng được hệ thuận mới từ hai họ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ như sau:

**Mệnh đề 2.4.** *Giả sử ta có hai môđun $M, N$ và hai họ môđun con $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ thỏa mãn các điều kiện như trong lập luận trên. Khi đó*

*Đặt $\mathfrak{I} = \{(A_i, B_u) \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid f(B_u) \subseteq A_i\}$ cùng với quan hệ "$\le$", xác định như sau:*

*$(A_i, B_u) \le (A_j, B_v)$ nếu $i \le j$ và $u \le v$ và I là một tập định hướng.*

*Tồn tại họ đồng cấu $\theta_{(j,v)}^{(i,u)} : A_i / f(B_u) \to A_j / f(B_v)$, trong đó $i \le j, u \le v$ sao cho họ các phần tử $\{(A_i, B_u), \theta_{(j,v)}^{(i,u)} (i \le j, u \le v)\}_{\mathfrak{I}}$ là một hệ thuận trên tập định hướng $\mathfrak{I}$.*

*Chứng minh.*

*Với mọi cặp phần tử $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$ $(f(B_u) \subseteq A_i, f(B_v) \subseteq A_j)$, do $\mathfrak{N}$ là tập định hướng nên tồn tại $w \in \mathfrak{N}$ sao cho $u, v \le w$. Khi đó tồn tại $k \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_w) \subseteq A_k$. Vì $\mathfrak{M}$ là tập định hướng nên tồn tại $t \in \mathfrak{M}$ sao cho $i, j, k \le t$ nên*

$f(B_w) \subseteq A_t$. *Do vậy* $(A_t, B_w) \in \Im$ *và thỏa mãn* $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \leq (A_t, B_w)$. *Vậy* $\Im$ *là tập định hướng.*

*Với mọi cặp phần tử* $(A_i, B_u)$, $(A_j, B_v) \in \Im$, $i \leq j$, $u \leq v$ *luôn xác định dãy đồng cấu các R-môđun* $A_i / f(B_u) \xrightarrow{i_j^{(i,u)}} A_j / f(B_u) \xrightarrow{\pi^u_{(j,v)}} A_j / f(B_v)$,

*trong đó* $i_j^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) = \phi_j^i(a_i) + f(B_u)$ *và* $\pi^u_{(j,v)}(a_j + f(B_u)) = a_j + f(B_v)$.

*Đặt* $\theta^{(i,u)}_{(j,v)} = \pi^u_{(j,v)} i_j^{(i,u)}$, $\theta^{(i,u)}_{(j,v)}(a_i + f(B_u)) = \phi_j^i(a_i) + f(B_v)$.

*Giả sử* $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v) \leq (A_t, B_w)$. *Ta có*

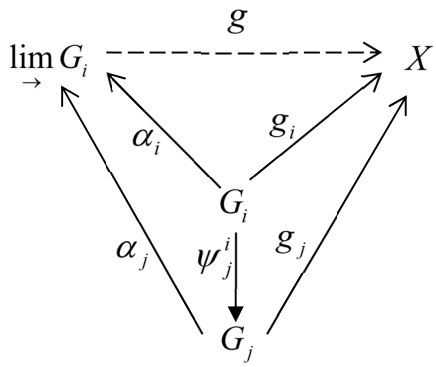
$$\theta^{(j,v)}_{(t,w)}\theta^{(i,u)}_{(j,v)}(a_i + f(B_u)) = \theta^{(j,v)}_{(t,w)}(\phi_j^i(a_i) + f(B_v)) = \phi_t^j(\phi_j^i(a_i)) + f(B_w)$$
$$= \phi_t^i(a_i) + f(B_w) = \theta^{(i,u)}_{(t,w)}(a_i + f(B_u)).$$

*Vậy* $\{(A_i, B_u) \in \Im, \phi^{(i,u)}_{(j,v)} (i \leq j, u \leq v)\}_\Im$ *là một hệ thuận trên tập định hướng* $\Im$.

## 3. PHÉP LẤY THƯƠNG QUA GIỚI HẠN THUẬN

*Mục này, trình bày các kết quả chính của bài báo. Trước hết ta nhắc lại khái niệm của giới hạn thuận và cấu trúc của giới hạn thuận khi tập chỉ số là tập định hướng.*

***Định nghĩa 3.1.*** *([3, trang 237]) Giả sử* $G$ *là một hệ thuận các R-môđun ứng với tập chỉ số* $I$. *Giới hạn thuận của hệ* $G$, *kí hiệu là* $\varinjlim_{i \in I} G_i$ *hoặc* $\varinjlim G_i$ *là một R-môđun và một họ đồng cấu các R-môđun* $\alpha_i : G_i \to \varinjlim G_i$ *sao cho* $\alpha_i = \alpha_j \psi_j^i$, *trong đó* $i \leq j$, *thỏa mãn tính chất: với mọi R-môđun X và họ các đồng cấu* $g_i : G_i \to X$ *sao cho* $g_i = g_j \psi_j^i$, *tồn tại duy nhất một đồng cấu* $g : \varinjlim G_i \to X$ *làm cho biểu đồ sau giao hoán:*




**Mệnh đề 3.2.** ([3, Proposition 5.23 và Lemma 5.30]) *Giới hạn thuận của một hệ thuận* $\left\{M_i, \phi_j^i, i \leq j\right\}_I$ *các mô đun R-môđun trên một tập chỉ số sắp thứ tự luôn tồn tại và được xác định như sau:*

$$\varinjlim M_i = (\oplus M_i) / S,$$

*trong đó*

$$S = \{\lambda_j \phi_j^i(m_i) - \lambda_i(m_i) \mid i, j \in I, i \le j, m_i \in M_i\}$$

*và* $\lambda_i : M_i \to \oplus M_i$ *là đồng cấu nhúng thứ i.*

*Hơn nữa, nếu* $I$ *là một tập định hướng, ta có*

*Mỗi phần tử của* $\varinjlim M_i$ *luôn viết được dưới dạng* $\lambda_i(m_i) + S$.

$\lambda_i(m_i) + S = 0$ *khi và chỉ khi tồn tại* $t \in I$ *sao cho* $i \le t$ *và* $\phi_t^i(m_i) = 0$.

*Nhận xét.* Theo Mệnh đề 2.4, ta có ba họ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ và $\mathfrak{I}$ là các hệ thuận, kết hợp với mệnh đề trên ta thấy giới hạn thuận của các họ này tồn tại và được xác định như sau:

$$\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i = \{\alpha_i(a_i) + S_1 \mid i \in \mathfrak{M}, a_i \in A_i\},$$

trong đó

$$\alpha_i : A_i \to \oplus_{i \in \mathfrak{M}} A_i,\ \alpha_i(a_i) = (..., 0, a_i, 0, ...) \text{ và}$$

$$S_1 = \{\alpha_j \phi_j^i(a_i) - \alpha_i(a_i) \mid i \in \mathfrak{M}, a_i \in A_i, i \le j\}.$$

$$\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u = \{\beta_u(b_u) + S_2 \mid u \in \mathfrak{N}, b_u \in B_u\},$$

trong đó

$$\beta_u : B_u \to \oplus_{u \in \mathfrak{N}} B_u,\ \beta_u(b_u) = (..., 0, b_u, 0, ...) \text{ và}$$

$$S_2 = \{\beta_v \varphi_v^u(b_u) - \beta_u(b_u) \mid u \in \mathfrak{N}, b_u \in B_u, u \le v\}.$$

$$\varinjlim_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{I}} \frac{A_i}{f(B_u)} = \{\gamma_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) + S \mid (A_i, B_u) \in \mathfrak{I}, a_i \in A_i\},$$

trong đó

$$\gamma_{(i,u)} : \frac{A_i}{f(B_u)} \to \oplus_{\{(A_i, B_u) \in \mathfrak{I}\}} \frac{A_i}{f(B_u)}, \gamma_{(i,u)}(a_i + B_u) = (0, ..., a_i + f(B_u), ..., 0) \text{ và}$$

$$S = \{\gamma_{(j,v)} \theta_{(j,v)}^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) - \gamma_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) \mid (A_i, B_u) \in \mathfrak{I}, a_i \in A_i, (A_i, B_u) \le (A_j, B_v)\}.$$

Nếu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ thỏa mãn thêm điều kiện với mọi $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$, $(A_i, B_u) \le (A_j, B_v)$ thỏa mãn $\phi_j^i . f\big|_{B_u} = f\big|_{B_v} . \varphi_v^u$ ta có thể xây dựng được một đơn cấu từ $\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$ vào $\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i$ như trong bổ đề sau:

**Bổ đề 3.3.** *Cho hai họ* $\mathfrak{A} = \left\{A_i, \phi_j^i (i \le j)\right\}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{B} = \left\{B_u, \varphi_v^u (u \le v)\right\}_{\mathfrak{N}}$, *tập* $\mathfrak{I}$ *được xác định như nêu trong Mệnh đề 2.4 và với mọi* $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$ *sao cho* $(A_i, B_u) \le (A_j, B_v)$ *thỏa mãn* $\phi_j^i . f\big|_{B_u} = f\big|_{B_v} . \varphi_v^u$. *Khi đó tồn tại một đơn cấu từ* $\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$ *vào* $\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i$. Hơn nữa,

$$\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} B_u \cong \{\alpha_i(a_i) + S_1 \mid \exists u \in \mathfrak{N}, f(B_u) \subseteq A_i, a_i = f(b_u)\}.$$

Chứng minh:

Lấy $\beta_u(b_u)+S_2 \in \varinjlim_{u\in\mathfrak{N}} B_u$, tồn tại $i \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_u) \subseteq A_i$, để cho gọn ta đặt $a_i = f(b_u)$. Xét tương ứng

$$g : \varinjlim_{u\in\mathfrak{N}} B_u \to \varinjlim_{i\in\mathfrak{M}} A_i, g(\beta_u(b_u)+S_2) = \alpha_i(a_i)+S_1$$

Trước hết ta cần chứng minh $g$ là một ánh xạ. Lấy $\beta_u(b_u)+S_2 = \beta_v(b_v)+S_2$, hay $\beta_u(b_u)-\beta_v(b_v)+S_2 = 0$. Tồn tại $i, j \in \mathfrak{M}$ sao cho

$$g(\beta_u(b_u)+S_2) = \alpha_i(a_i)+S_1, g(\beta_v(b_v)+S_2) = \alpha_j(a_j)+S_1,$$

trong đó $a_i = f(b_u), a_j = f(b_v)$. Theo Mệnh đề 2.4 (i), tồn tại $(A_t, B_{\mathrm{w}}) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \le (A_t, B_{\mathrm{w}})$. Đặt $b_w = \varphi_w^u(b_u) - \varphi_w^v(b_v)$, dẫn đến $\beta_w(b_w) = \beta_u(b_u) - \beta_v(b_v)$, do đó $\beta_u(b_u) - \beta_v(b_v) + S_2 = \beta_w(b_w) + S_2 = 0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii), tồn tại $z \in \mathfrak{N}, w \le z$ sao cho $\varphi_z^w(b_w) = 0$ hay $\varphi_z^u(b_u) = \varphi_z^v(b_v)$.

Theo tính chất của hai họ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, tồn tại $k \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_z) \subseteq A_k$. Theo Mệnh đề 2.4 (i), tồn tại $(A_p, B_{\mathrm{q}}) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_t, B_{\mathrm{w}}), (A_k, B_z) \le (A_p, B_{\mathrm{q}})$. Do vậy từ $\varphi_z^u(b_u) = \varphi_z^v(b_v)$ ta có $\varphi_q^u(b_u) = \varphi_q^v(b_v)$ suy ra $f(\varphi_q^u(b_u)) = f(\varphi_q^v(b_v))$. Vì $(A_i, B_{\mathrm{u}}) \le (A_p, B_{\mathrm{q}})$ và $(A_j, B_{\mathrm{v}}) \le (A_p, B_{\mathrm{q}})$, nên $f(\varphi_q^u(b_u)) = \phi_p^i(f(b_u)) = \phi_p^i(a_i)$ và $f(\varphi_q^v(b_v)) = \phi_p^j(f(b_v)) = \phi_p^j(a_j)$. Dẫn đến $\phi_p^i(a_i) = \phi_p^j(a_j)$

Đặt $a_t = \phi_t^i(a_i) - \phi_t^j(a_j)$, dẫn đến $\alpha_t(a_t) = \alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j)$, do đó $\alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j) + S_1 = \alpha_t(a_t) + S_1$.

Ta có $\phi_p^t(a_t) = \phi_p^t\phi_t^i(a_i) - \phi_p^t\phi_t^j(a_j) = \phi_p^i(a_i) - \phi_p^j(a_j) = 0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii) ta có $\alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j) + S_1 = 0$ hay $\alpha_i(a_i) + S_1 = \alpha_j(a_j) + S_1$. Vậy $g$ là một ánh xạ.

Lấy $\beta_u(b_u)+S_2, \beta_v(b_v)+S_2 \in \varinjlim_{u\in\mathfrak{N}} B_u$. Tồn tại $i, j \in \mathfrak{M}$ sao cho

$$g(\beta_u(b_u)+S_2) = \alpha_i(a_i)+S_1, g(\beta_v(b_v)+S_2) = \alpha_j(a_j)+S_1,$$

trong đó $a_i = f(b_u), a_j = f(b_v)$. Khi đó ta có

$$g(\beta_u(b_u)+S_2) + g(\beta_v(b_v)+S_2) = \alpha_i(a_i) + \alpha_j(a_j) + S_1,$$

Theo Mệnh đề 2.4 (i), tồn tại $(A_t, B_{\mathrm{w}}) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \le (A_t, B_{\mathrm{w}})$. Đặt

$$b_w = \varphi_w^u(b_u) + \varphi_w^v(b_v) \in B_{\mathrm{w}},$$

dẫn đến $\beta_w(b_w) = \beta_u(b_u) + \beta_v(b_v)$, $\beta_u(b_u) + \beta_v(b_v) + S_2 = \beta_w(b_w) + S_2 = 0$.

Do vậy $g(\beta_u(b_u) + \beta_v(b_v) + S_2) = g(\beta_w(b_w) + S_2) = \alpha_{\mathrm{t}}(a_t) + S_1$, trong đó $a_t = f(b_{\mathrm{w}})$.

Vì vậy $a_t = f(b_{\mathrm{w}}) = f\varphi_w^u(b_u) + f\varphi_w^v(b_v) = \varphi_t^i f(b_u) + \varphi_t^j f(b_v) = \varphi_t^i(a_i) + \varphi_t^j f(a_j)$.

Từ đó ta nhận được $\alpha_i(a_i) + \alpha_j(a_j) + S_1 = \alpha_t(a_t) + S_1 = g(\beta_u(b_u) + \beta_v(b_v) + S_2)$.

Giả sử $g(\beta_u(b_u)+S_2)=\alpha_i(a_i)+S_1=0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii) tồn tại $k\in\mathfrak{M}, i\le k$ sao cho $\phi_k^i(a_i)=0$. Ta lại có $\phi_k^i(a_i)=\phi_k^i(f(b_u))=f(\varphi_u^u(b_u))$. Vì $f$ là đơn cấu nên $\varphi_u^u(b_u)=0,$ theo Mệnh đề 3.2 (ii) ta nhận được $\beta_u(b_u)+S_2=0$. Vậy $g$ là đơn cấu. □

Theo kết quả trên, ta có thể xem $\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u$ là môđun con của $\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}}A_i$, do đó không mất tính tổng quát ta có thể viết $\frac{\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}}A_i}{\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u}$ thay cho môđun thương $\frac{\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}}A_i}{g(\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}}A_i)}$ và $\frac{A_i}{B_u}$ thay cho $\frac{A_i}{f(B_u)}$. Từ đó ta có thể phát biểu kết quả chính của bài báo như sau:

**Định lý 3.4.** *Cho hai họ* $\mathfrak{A}=\left\{A_i,\phi_{j'}^i(i\le j)\right\}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{B}=\left\{B_u,\varphi_v^u(u\le v)\right\}_{\mathfrak{N}}$, *tập* $\mathfrak{I}$ *được xác đinh như nêu trong Bổ đề 2.4 và với mọi* $(A_i,B_u),(A_j,B_v)\in\mathfrak{I}$ *sao cho* $(A_i,B_u)\le(A_j,B_v)$ *thỏa mãn* $\phi_j^i f\big|_{B_u}=f\big|_{B_v}\varphi_v^u$. *Khi đó* $\varinjlim_{(A_i,B_u)\in\mathfrak{I}}\frac{A_i}{B_u}\cong\frac{\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}}A_i}{\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u}$.

*Chứng minh.*

Xét tương ứng

$$\lambda_{(i,u)}:\frac{A_i}{f(B_u)}\to\frac{\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}}A_i}{\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u},\lambda_{(i,u)}(a_i+f(B_u))=(\alpha_i(a_i)+S_1)+\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u.$$

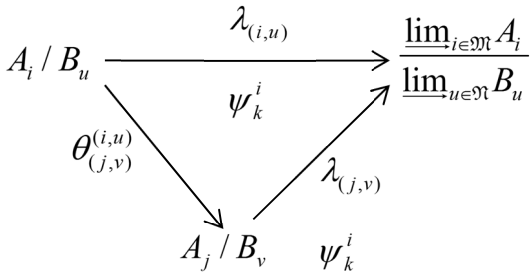
Ta chỉ cần chứng tỏ tương ứng trên là một ánh xạ.

Thật vậy, giả sử $a_i+f(B_u)=b_i+f(B_u)$ trong đó $a_i,b_i\in A_i$ suy ra $a_i-b_i\in f(B_u)$.

Do vậy $(\alpha_i(a_i-b_i)+S_1)+\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u=0.$

Từ đó ta nhận được $(\alpha_i(a_i)+S_1)+\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u=(\alpha_i(b_i)+S_1)+\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}}B_u$ hay $\lambda_{(i,u)}(a_i+f(B_u))=\lambda_{(i,u)}(b_i+f(B_u))$. Do đó $\lambda_{(i,u)}$ là ánh xạ.

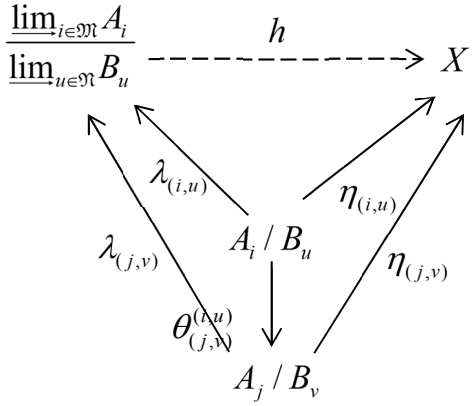
Với mọi $(A_i,B_u)\le(A_j,B_v),$ ta có biểu đồ giao hoán sau




Thật vậy

$$\lambda_{(j,v)}\theta_{(j,v)}^{(i,u)}(a_i+f(B_u))=\lambda_{(j,v)}(a_i+f(B_u))=(\alpha_j(a_i)+S_1)+\varinjlim_{v\in\mathfrak{N}}B_v$$
$$=(\alpha_j(\phi_j^i(a_i))+S_1)+\varinjlim_{v\in\mathfrak{N}}B_v=(\alpha_i(a_i)+S_1)+\varinjlim_{v\in\mathfrak{N}}B_v=\lambda_{(i,u)}a_i+f(B_u).$$

Xét biểu đồ giao hoán




Lấy $\alpha_i(a_i)+S_1 \in \varinjlim_{i\in\mathfrak{M}} A_i$. Với mỗi $v\in\mathfrak{N}$ luôn tồn tại $t\in\mathfrak{M}$ cho $f(B_v)\subseteq A_t$. Vì $\mathfrak{M}$ là tập định hướng nên luôn tồn tại $k\in\mathfrak{M}$ sao cho $i,t\le k$. Khi đó $(A_k,B_v)\in\mathfrak{J}$ nên $\gamma_{(k,v)}(a_i+f(B_v))+S\in\varinjlim_{(A_i,B_v)\in\mathfrak{J}}\frac{A_i}{B_v}$.

Vì vậy ta xác định được tương ứng sau:

$$h:\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}} A_i \to \varinjlim_{(A_i,B_u)\in\mathfrak{J}}\frac{A_i}{B_u}, h(\alpha_i(a_i)+S_1)=\gamma_{(k,v)}(\phi_k^i(a_i)+f(B_v))+S.$$

Giả sử $\alpha_i(a_i)+S_1=\alpha_j(a_j)+S_1$ hay $\alpha_i(a_i)-\alpha_j(a_j)+S_1=0$. Khi đó tồn tại $(t,w)$ sao cho $h(\alpha_j(a_j)+S_1)=\gamma_{(t,w)}(\phi_t^j(a_j)+f(B_w))+S$.

Giả sử $(k,v),(t,w)\le(\varepsilon,\delta)$. Đặt $a_\varepsilon=\phi_\varepsilon^i(a_i)-\phi_\varepsilon^j(a_j)$ ta có

$$a_\varepsilon+f(B_\delta)=\theta_{(\varepsilon,\delta)}^{(k,v)}(\phi_k^i(a_i)+f(B_v))-\theta_{(\varepsilon,\delta)}^{(t,w)}(\phi_t^j(a_j)+f(B_w)).$$

Khi đó $\gamma_{(\varepsilon,\delta)}(a_\varepsilon+f(B_\delta))=\gamma_{(k,v)}(\phi_k^i(a_i)+f(B_v))-\gamma_{(t,w)}(\phi_t^j(a_j)+f(B_w))$

Đặt $a_t=\phi_t^i(a_i)-\phi_t^j(a_j)$ suy ra $\alpha_t(a_t)=\alpha_i(a_i)-\alpha_j(a_j)$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii) tồn tại $p\in\mathfrak{M}, t\le p$ sao cho $\phi_p^t(\alpha_t(a_t))=0$ hay $\phi_p^i(a_i)-\phi_p^j(a_j)=0$.

Tồn tại $q\in\mathfrak{M}, p\le q, z\in\mathfrak{N}$ sao cho $(A_t,B_w),(A_\varepsilon,B_\delta)\le(A_q,B_z)\in\mathfrak{J}$. Khi đó

$$\theta_{(q,z)}^{(\varepsilon,\delta)}(a_\varepsilon+f(B_\delta))=\theta_{(q,z)}^{(\varepsilon,\delta)}(\phi_\varepsilon^i(a_i)-\phi_\varepsilon^j(a_j)+f(B_\delta))=\phi_p^i(a_i)-\phi_p^j(a_j)+f(B_z)=0$$

Vậy $h$ là một ánh xạ. Ngoài ra dễ dàng thấy $h$ là một toàn cấu. Khi đó ta có

$$\varinjlim_{(A_i,B_u)\in\mathfrak{J}}\frac{A_i}{B_u}\cong\frac{\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}} A_i}{\ker(h)}.$$

Lập luận tương tự trên, giả sử $h(\alpha_i(a_i)+S_1)=0$ ta có $\gamma_{(k,v)}(\phi_k^i(a_i)+f(B_v))+S=0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii), tồn tại $(A_t,B_z)\in\mathfrak{J}$, $(A_k,B_v)\le(A_t,B_z)$ sao cho $\theta_{(t,z)}^{(k,v)}(\phi_k^i(a_i)+f(B_v))=0$ hay $\phi_t^i(a_i)+f(B_z))=0$, như vậy $\phi_t^i(a_i)\in f(B_z))$. Do vậy $\ker(h)=\varinjlim_{u\in\mathfrak{N}} B_u$.

**Hệ quả 3.5.** ([5, Corollary 5.38]) *Cho A là R-môđun trái,* $\left\{A_i, \phi^i_{j'}(i \le j)\right\}_I$ *là một hệ thuận các môđun con của A trên tập định hướng I. Khi đó ta có:*

i) $\varinjlim_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$ .

ii) $\varinjlim_{i\in I} A / A_i = A / \bigcup_{i\in I} A_i$ .

*Chứng minh.*

(i) Áp dụng Định lý 3.4, cho hai môđun $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ và $B = 0$ và cho hai hệ thuận các mô đun con của A, B là $\mathfrak{A} = \left\{A_i, \phi^i_{j'}(i \le j)\right\}_I, \mathfrak{B} = \left\{B_i = 0, \varphi^i_{j'}(i \le j)\right\}_I$. Kết hợp với $\varinjlim_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i = A$ $\varinjlim_{i\in I} B_u = \bigcup_{u\in I} B_u = 0$ ta nhận kết quả (i) của Bổ đề.

(ii) Áp dụng Định lý 3.4, cho hai môđun $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ và $B = 0$ và cho hai hệ thuận các môđun con của A và B là $\mathfrak{A} = \left\{B_i = A, \phi^i_{j'}(i \le j)\right\}_u, \mathfrak{B} = \left\{A_i = 0, \varphi^i_{j'}(i \le j)\right\}_I$. Kết hợp với $\varinjlim_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} B_i = A$ $\varinjlim_{i\in I} A_i = \bigcup_{u\in I} A_i$ ta nhận được kết quả của (ii) của bổ đề.

**Hệ quả 3.6.** ([5, Proposition 5.37]) *Cho B là môđun con của A và hai hệ thuận các môđun con của A và B lần lượt là* $\mathfrak{A} = \left\{A_i, \phi^i_{j'}(i \le j)\right\}_{\mathfrak{M}}$ , $\mathfrak{B} = \left\{B_u, \varphi^u_v(u \le v)\right\}_{\mathfrak{N}}$ *thỏa mãn với mọi* $B_u \in \mathfrak{B}$ *luôn tồn tại* $A_i \in \mathfrak{A}$ *sao cho* $B_u \subseteq A_i$ *và* $A = \bigcup_{i\in\mathfrak{M}} A_i, B = \bigcup_{i\in\mathfrak{N}} B_i$ . *Trên tập* $\mathfrak{I} = \{(A, B) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \mid B \subseteq A\}$ *trang bị một quan hệ thứ tự bộ phận "≤" như sau: với mọi* $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$ *thì* $(A_i, B_u) \le (A_j, B_v)$ *khi và chỉ khi* $A_i \subseteq A_j$ *và* $B_u \subseteq B_v$ . *Khi đó*

$$\varinjlim_{(A_i, B_u)\in\mathfrak{I}} \left(A_i / B_u\right) \cong A / B.$$

*Chứng minh.*

Áp dụng Định lý 3.4, cho hai môđun A, B và cho hai hệ thuận các môđun con của A, B là $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Kết hợp với $\varinjlim_{i\in\mathfrak{M}} A_i = \bigcup_{i\in\mathfrak{M}} A_i = A$ và $\varinjlim_{i\in\mathfrak{N}} B_u = \bigcup_{u\in\mathfrak{N}} B_u = B$ ta nhận kết quả của bổ đề.

4. KẾT LUẬN

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 xây dựng một hệ thuận mới từ hai hệ thuận ban đầu (Mệnh đề 2.4). Mục 3 trình bày kết quả chính của bài báo về tính bất biến của giới hạn thuận qua phép lấy thương (Định lý 3.4) và khi xét hai hệ thuận đặc biệt ta nhận được các kết quả của J. J. Rotman [5, Section 5.2] (Hệ quả 3.5, Hệ quả 3.6).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Quang Huy (2016), *Bảo toàn giới hạn qua lấy tổng trực tiếp,* Tạp chí khoa học, Trường Đại học Hồng Đức, Số 29, 6- 2016.

[2] L. Angeleri-Hügel, J. Trlifaj (2004), *Direct limits of modules of finite projective dimension*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 236, Dekker, New York, pp. 27-44.

[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.

[4] M. Brodmann and R.Y. Sharp (1998), *Local cohomology - an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press.

[5] J. J. Rotman (2000), *An introduction to homological algebra*, Academic Press.

[6] C. A. Weibel (1997), *An introduction to homological algebra*, Cambridge University press.

# QUOTIENT MODULES PRESERVES DIRECT LIMITS

**Pham Thi Bich Ha, Le Xuan Dung**

ABSTRACT

*In this paper, we show that quotient of left $A$-modules preserves direct limits. These results extend previous results of J. J. Rotman.*

**Keywords:** *Direct limits, left A-modules.*

# NGHIÊN CỨU CÁC CƠ CHẾ TÁN XẠ CHỦ ĐẠO ẢNH HƯỞNG ĐẾN ĐỘ LINH ĐỘNG CỦA HẠT TẢI TRONG GIẾNG LƯỢNG TỬ PHA TẠP HAI PHÍA

**Lê Văn Hiểu[1], Trần Thị Hải[2]**

TÓM TẮT

*Chúng tôi nghiên cứu ảnh hưởng của pha tạp hai phía lên quá trình vận chuyển lượng tử trong giếng lượng tử vuông góc. Bằng việc sử dụng phương pháp biến phân, chúng tôi đã đưa ra được biểu thức giải tích về sự phân bố của hạt tải và các hàm tự tương quan cho các cơ chế tán xạ. Chúng tôi nhận thấy phương pháp pha tạp 2 phía có thể làm tăng độ linh động của hạt tải so với pha tạp một phía. Từ đó, chúng tôi đưa ra sự phụ thuộc của hệ số nâng cao độ linh động vào độ rộng kênh dẫn và nồng độ hạt tải. Lý thuyết của chúng tôi đã thành công trong việc giải thích các thí nghiệm gần đây về tính chất vận chuyển, phải kể đến là sự phụ thuộc của hệ số nâng cao độ linh động vào độ rộng kênh dẫn.*

**Từ khóa:** *Pha tạp hai phía, phương pháp biến phân, hệ số nâng cao độ linh động, giếng lượng tử.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các kênh dẫn với độ linh động cao là một trong những vấn đề thách thức của vật lý bán dẫn và có tầm quan trọng lớn đối với việc ứng dụng các thiết bị. Để nâng cao phẩm chất của các linh kiện, không những phải tăng mật độ hạt tải mà còn phải tăng độ linh động của hạt tải. Độ linh động lớn cho phép chế tạo những linh kiện có khả năng điều khiển dòng cao và tốc độ đóng ngắt (chuyển) mạch nhanh. Như chúng ta đã biết, để nâng cao độ linh động của hạt tải hai chiều trong giếng lượng tử người ta thường sử dụng phương pháp điều biến các nhân tố quyết định như: cấu trúc điện tử, các cơ chế tán xạ và các nguồn giam hãm hạt tải [1,2,3].

Gần đây, chúng tôi đã chỉ ra rằng, việc điều biến bất đối xứng hàm sóng do pha tạp một bên sẽ làm tăng tán xạ do độ nhám gây nên, ví dụ như thế nhám bề mặt và thế biến dạng khớp sai… làm cho độ linh động giảm mạnh [7]. Vì vậy, chúng tôi cho rằng có thể nâng cao độ linh động bằng cách điều biến đối xứng hàm sóng do pha tạp hai bên. Các thực nghiệm gần đây cũng đã nghiên cứu tính chất vận chuyển của các giếng lượng tử pha tạp đối xứng hai bên [4,5,8,10] tuy nhiên vẫn chưa có lý thuyết nào giải thích thỏa đáng.

Vì vậy, mục tiêu của bài báo này là đưa ra lý thuyết, nghiên cứu hiện tượng vận chuyển ở nhiệt độ thấp của hạt tải trong giếng lượng tử pha tạp hai phía. Lý thuyết bao gồm tất cả các cơ chế tán xạ chủ đạo, đặc biệt là thế biến dạng khớp sai.

[1] *Giáo viên Trường Trung học phổ thông Lê Lai, huyện Thọ Xuân, Thanh Hóa*
[2] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Trong phần 2.1 chúng tôi đưa ra lý thuyết vận chuyển của hạt tải ở nhiệt độ thấp. Phần 2.2, là hàm tự tương quan cho các cơ chế tán xạ chủ đạo. Phần 2.3 là hệ số nâng cao độ linh động của hai mô hình pha tạp hai phía và pha tạp một phía. Phần 2.4 là kết quả tính số và so sánh với thực nghiệm. Phần 3 là phần tổng kết.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Lý thuyết vận chuyển tuyến tính

Theo lý thuyết vận chuyển tuyến tính, độ linh động ở nhiệt độ thấp được xác định bởi $\mu = e\tau / m^*$ với m* là khối lượng hiệu dụng trong mặt phẳng của kênh dẫn. Thời gian sống vận chuyển được biểu diễn qua hàm tự tương quan:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar E_F} \int_0^{2k_F} dq \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q^2}{(4k_F^2 - q^2)^{1/2}} \frac{\left\langle |U(q)|^2 \right\rangle}{\varepsilon^2(q)}, \quad (1)$$

ở đây, $q = (q, \varphi)$ là xung lượng truyền hai chiều cho bởi các cơ chế tán xạ trong mặt phẳng x, y: $q = |q| = 2k_F \sin(\vartheta / 2)$ với $\vartheta$ là góc tán xạ.

Năng lượng Fermi được xác định: $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m^*$ với $k_F = \sqrt{2\pi p_s}$ là số sóng Fermi.

Hàm tự tương quan trong phương trình (1) có $\left\langle |U(q)|^2 \right\rangle$ được định nghĩa là trung bình thống kê các biến đổi Fourier hai chiều của các thế tán xạ phụ thuộc vào hàm sóng bao.

$$U(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dz |\zeta(z)|^2 U(q, z). \quad (2)$$

Hàm điện môi $\varepsilon(q)$ định lượng cho hiệu ứng chắn của thế tán xạ của hạt tải hai chiều. Áp dụng gần đúng trường ngẫu nhiên ta có:

Trong đó, $q_s = 2m^* e^2 / \varepsilon_L \hbar^2$ là nghịch đảo chiều dài chắn hai chiều Thomas-Fermi. Hiệu chính trường cục bộ do tương tác trao đổi giữa các hạt với nhau được cho bởi:

$$G(q) = \frac{q}{2\sqrt{q^2 + k_F^2}}$$

Thừa số dạng chắn phụ thuộc vào tương tác của hạt dọc theo phương nuôi, được xác định bởi:

$$F_s(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \zeta^2(z) \zeta^2(z') e^{-q|z-z'|}. \quad (3)$$

Như ta đã biết, hàm sóng mô tả sự phân bố của hạt tải trong giếng lượng tử pha tạp đối xứng hai phía có dạng [9]:

$$\zeta(z) = \begin{cases} 2B\sqrt{\frac{\pi}{L}} \cos(\frac{\pi z}{L}) \cosh(\frac{cz}{L}) & khi \quad |z| \le \frac{L}{2} \\ 0 & khi \quad |z| > \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (4)$$

Thay biểu thức hàm sóng ở phương trình (4) vào phương trình (1), kết hợp với các hàm đơn giản $\gamma_n(x)$ và $\omega_n(x)$ cho bởi (12) và (13),

$$\gamma_n(x) = \left[\frac{1}{x} + \frac{(-1)^n x}{x^2 + n^2\pi^2}\right]\sinh x, \tag{5}$$

Và:

$$\omega_n(x) = \left[\frac{(-1)^n \pi x}{x^2 + n^2\pi^2}\right]\sinh x \tag{6}$$

với $n = 0, 1, 2, ...$ là số nguyên.

Ta thu được:

$$\begin{aligned} F_s(t) = {} & \frac{\pi^2 B^4}{8}\left\{\frac{4t}{t^2-4c^2}[\gamma_1(2c)+1] + \frac{8}{t}[2\gamma_1(c) - e^{-t/2}\gamma_1(t/2)+1] + \right. \\ & + \left(\frac{t-2c}{(t-2c)^2+4\pi^2} + \frac{t+2c}{(t+2c)^2+4\pi^2}\right)[\gamma_2(2c)+2\gamma_1(2c)-\gamma_0(2c)+1] + \\ & + \frac{8t}{t^2+4\pi^2}[\gamma_2(c)+2\gamma_1(c)-\gamma_0(c)+e^{-t/2}\gamma_1(t/2)+1/2] + \frac{16\pi ct}{[(t-2c)^2+4\pi^2][(t+2c)^2+4\pi^2]}\times \\ & \times[\omega_2(2c)+2\omega_1(2c)] - 8\pi^2\left[\frac{e^{c-t/2}}{(t-2c)[(t-2c)^2+4\pi^2]} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-(c+t/2)}}{(t+2c)[(t+2c)^2+4\pi^2]} + \frac{4e^{-t/2}}{t[t^2+4\pi^2]}\right]\{\gamma_1(c+t/2)+\gamma_1(c-t/2)\}\right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

Ở nhiệt độ thấp, các hạt tải có thể có các cơ chế tán xạ sau: Tạp xa (RI), độ nhám bề mặt (SR), thế biến dạng khớp sai (DP). Thời gian sống tổng cộng được xác định bởi quy tắc Matthiessen: $\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{2}{\tau_{RI}} + \frac{2}{\tau_{SR}} + \frac{2}{\tau_{DP}}$, (8)

ở đây, hệ số 2 xuất hiện do có hai lớp pha tạp và hai mặt nhám.

### 2.2. Hàm tự tương quan cho các cơ chế tán xạ chủ đạo

*2.2.1. Tán xạ gây bởi Tạp xa*

Từ phương trình (1), ta thấy giá trị của thời gian sống vận chuyển được biểu diễn qua hàm tự tương quan cho mỗi cơ chế tán xạ. Đầu tiên, hàm tự tương quan cho tán xạ từ sự phân bố ngẫu nhiên của tạp được xác định bởi tích phân trên toàn miền pha tạp [6]:

$$\left\langle \left|U_{RI}(q)\right|^2 \right\rangle = \left(\frac{2\pi e^2}{\varepsilon_L q}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz_i N_I(z_i) F_R^2(q, z_i). \tag{9}$$

Trong đó, $N_I(z_i)$ là sự phân bố của tạp và $F_R(q, z_i)$ là thừa số dạng đối với lá tạp ở vị trí $z = z_i$, được xác định bởi:

$$F_R(q,z_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}dz\left|\varsigma(z)\right|^2e^{-q|z-z_i|}. \quad (10)$$

Tính toán phương trình (10) với hàm sóng cho bởi phương trình (4) ta được:

$$F_R(q,z_i)=R(qL)\frac{e^{qz_i}}{2}, \quad (11)$$

trong đó, t=qL và

$$R(t)=\pi B^2\left[\gamma_1(c+t/2)+\gamma_1(c-t/2)+2\gamma_1(t/2)\right] \quad (12)$$

với $\gamma_1(c)$ là hàm được xác định bởi phương trình (12).

Như vậy, hàm tự tương quan xác định bởi các phương trình từ (9) đến (12).

Từ mô hình trên, ta tiến hành xử lý nhiệt trong quá trình nuôi epitaxy chùm phân tử. Ở nhiệt độ cao, tương quan giữa các ion yếu hơn so với trường tạp ngẫu nhiên của nó, nên hàm tự tương quan có dạng đơn giản như sau:

$$\left\langle\left|U_{RI}(q)\right|^2\right\rangle_c=\left\langle\left|U_{RI}(q)\right|^2\right\rangle F_C(q), \quad (13)$$

Ở đây, chỉ số $\langle...\rangle_c$ biểu thị trung bình thống kê sự phân bố của tạp. Hệ số tương quan tạp nhỏ hơn 1 đơn vị: $F_C(q)=\dfrac{q}{q+q_c}$, tham số tương quan cho bởi: $q_c=\dfrac{2\pi e^2N_I^{2D}}{\varepsilon_Lk_BT_0}$,

$N_I^{2D}=N_IL_d$ là mật độ lá tạp hai chiều, $T_0$ là nhiệt độ làm lạnh đối với sự khuếch tán của tạp, $k_B$ là hằng số Boltzmann.

Từ đó ta tìm được hàm tự tương quan cho tạp có dạng:

$$\left\langle\left|U_{RI}(q)\right|^2\right\rangle_c=\left(\frac{2\pi e^2}{\varepsilon_Lq}\right)^2\frac{N_IL^3}{4}F_{RI}(qL), \quad (14)$$

Ở đây thừa số dạng chắn có dạng:

$$F_{RI}(t)=\frac{R^2(t)}{2}\frac{e^{-2st}-e^{-2dt}}{t^2(t+t_c)}$$

*với* $d=z_z/L$ *và* $s=z_s/L$ *và* $t_c=q_cL.$

*2.2.2. Tán xạ gây bởi độ nhám bề mặt*

Tiếp theo chúng tôi đưa ra hàm tự tương quan cho tán xạ do độ nhám bề mặt gây nên. Như chúng ta đã biết, giá trị của thế trong không gian véc tơ sóng đối với các tán xạ từ bề mặt nhám phía đỉnh có dạng [6]:

$$U_{SR}(q)=V_0\left|\varsigma_-\right|^2\Delta_q, \quad (15)$$

Ở đây, $\Delta_q$ là biến đổi Fourier hai chiều của cấu hình bề mặt.

$$V_0\left|\varsigma_-\right|^2=\left[E(c)-V_0(z_0)\right]\varsigma^2(z_0)+\int_{-\infty}^{z_0}dz\varsigma^2(z)\frac{\partial V_H(z)}{\partial z} \quad (16)$$

với $z_0$ là cực trị của hàm sóng $(z_0>-L/2)$. Trong trường hợp đơn giản, chọn $z_0$=0, kết hợp với các thế tán xạ trong [9], chúng tôi đưa ra biểu thức giải tích của thế tán xạ có dạng:

$$V_0\left|\varsigma_-\right|^2=[E(c)-V_0(z_o)]\varsigma^2(0)+\frac{\pi^3e^2B^4p_s}{2\varepsilon_L}\left\{\frac{1}{c^2+\pi^2}[\frac{2c^2+\pi^2}{c}[\theta_1(2c)+2\theta_1(c)]+\right.$$
$$+\frac{c}{2}[\theta_2(2c)+2\theta_2(c)-\theta_0(2c)+2\theta_0(c)]-\frac{\pi}{2}[\sigma_2(2c)+2\sigma_1(2c)]-\frac{c^2+2\pi^2}{\pi}\times \quad (17)$$
$$\left.\times[\sigma_2(c)+2\sigma_1(c)]-\frac{2c^2+3\pi^2}{2\pi}[\sigma_2(0)+2\sigma_1(0)]+2[\frac{\partial\theta_1(c)}{\partial c}+\frac{\partial\theta_1(0)}{\partial c}]\right\}$$

*2.2.3. Tán xạ gây bởi thế biến dạng khớp sai*

Cuối cùng chúng tôi chứng minh rằng, độ nhám bề mặt tạo ra thăng giáng của biến dạng trong giếng lượng tử có sự chênh lệch hằng số mạng. Chính sự chênh lệch này dẫn tới sự thay đổi của dạng biên, làm xuất hiện các cơ chế tán xạ mới. Thế tán xạ mới này phụ thuộc vào dạng đối xứng của tinh thể và loại hạt tải.

Dưới đây, chúng tôi đưa ra biến đổi Fourier hai chiều của thế biến dạng khớp sai đối với tinh thể lập phương. Thế tán xạ ở phía bề mặt nhám của đỉnh giếng cho bởi, đối với điện tử:

$$U_{DP}^{(c)}(q,z)=-\frac{\alpha\in_{\|}\Xi_u(K+1)}{2}q\Delta_qe^{-q(z+L/2)} \quad (18)$$

và đối với lỗ trống:

$$U_{DP}^{(v)}(q,z)=\frac{\alpha\in_{\|}}{2}q\Delta_qe^{-q(z+L/2)}\times\left\{\frac{3}{2}\left[b_s(K+1)\right]^2(1+si\,\mathrm{n}^4\varphi+\cos^4\varphi)+\left(\frac{d_sG}{4c_{44}}\right)^2(1+\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\right\}^{1/2} \quad (19)$$

ở bên trong giếng $\left(\left|z\right|\le L/2\right)$ và bằng 0 trong các khoảng còn lại. Với $\Xi_u$ là thành phần biến dạng thể tích tổ hợp của thế biến dạng cho vùng dẫn.

Sử dụng hàm sóng từ phương trình (1) chúng tôi xác định được biểu thức cho hàm tự tương quan cho thế biến dạng khớp sai cho điện tử có dạng:

$$\left\langle\left|U_{DP}^{(c)}(q,z)\right|^2\right\rangle=\left(\frac{\pi^{3/2}\alpha\in_{\|}\Xi_u(K+1)\Lambda\Delta B^2}{4L}\right)^2, \quad (20)$$

và cho lỗ trống:

$$\left\langle\left|U_{DP}^{(v)}(q,z)\right|^2\right\rangle=\left(\frac{\pi^{3/2}\alpha\in_{\|}\Xi_u\Lambda\Delta B^2}{4L}\right)^2F_{DP}(t)\times$$
$$\times\left\{\frac{3}{2}\left[b_s(K+1)\right]^2(1+si\,\mathrm{n}^4\varphi+\cos^4\varphi)+\left(\frac{d_sG}{4c_{44}}\right)^2(1+\sin^2\varphi\cos^2\varphi)\right\}, \quad (21)$$

Trong đó, thừa số dạng:

$$F_{DP}(t) = t^2 e^{-t}\left[\gamma_1(c+t/2)+\gamma_1(c-t/2)+2\gamma_1(t/2)\right]^2 F_R(t).$$

Như vậy, với việc sử dụng hàm sóng bao ở phương trình (4), chúng ta đã xác định được hàm tự tương quan cho tất cả các cơ chế tán xạ của giếng lượng tử pha tạp điều biến đối xứng ở dưới dạng giải tích. Các hàm tự tương quan này đều phụ thuộc vào tham số biến phân $c$, vì vậy chúng ta phải tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng.

### 2.3. Hệ số nâng cao độ linh động

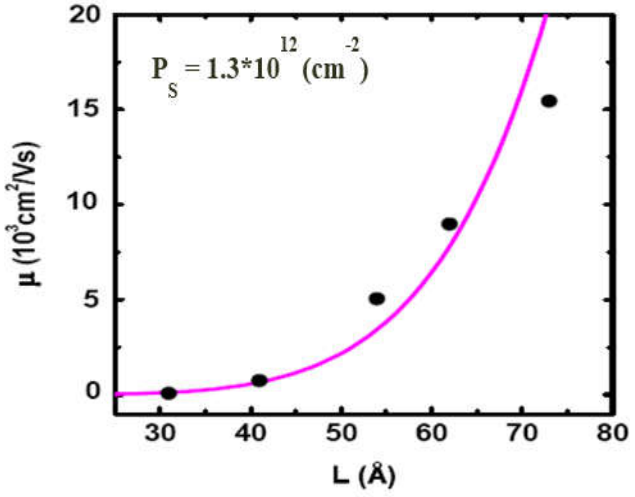
Cuối cùng, để nghiên cứu tính ưu việt của phương pháp pha tạp hai phía so với pha tạp một phía, chúng tôi đã đưa ra một đại lượng gọi là hệ số nâng cao độ linh động Q: là tỉ số độ linh động giữa trường hợp pha tạp hai phía $\mu_{tot}^{sym}$ và pha tạp một phía $\mu_{tot}^{asym}$ với cùng nồng độ hạt tải và dạng bề mặt.

$$Q^{(L,P_s,\Lambda)} = \frac{\mu_{tot}^{sym}(L,p_s;\Delta,\Lambda)}{\mu_{tot}^{asym}(L,p_s;\Delta,\Lambda)} \qquad (22)$$

Giản ước thành phần biên độ nhám trong (22), tỉ số chỉ còn phụ thuộc vào bề rộng giếng lượng tử, mật độ hạt tải và độ dài tương quan.

### 2.4. Kết quả và thảo luận

Chúng tôi tiến hành tính số độ linh động của hạt tải trong mô hình giếng lượng tử pha tạp hai phía.




**Hình 1. Độ linh động của hạt tải trong giếng lượng tử pha tạp đối xứng hai phía phụ thuộc vào bề rộng giếng lượng tử L, so sánh với thực nghiệm [10]**

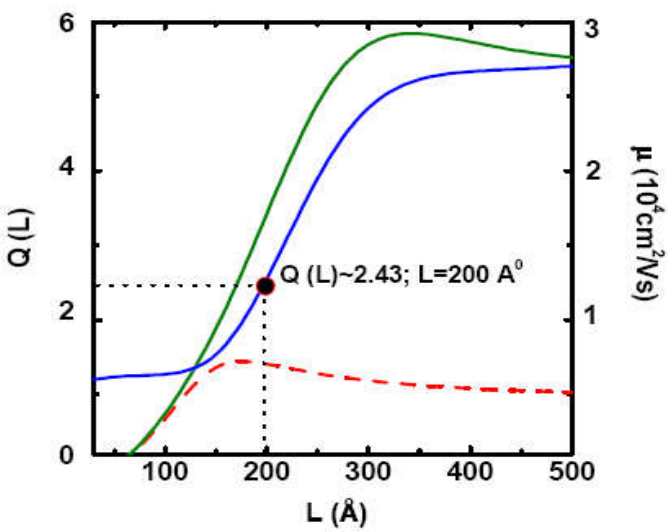
Độ linh động tổng cộng của khí 2DEG trong giếng lượng tử GaSb/GaAs/GaSb pha tạp điều biến đối xứng, phụ thuộc vào bề rộng giếng lượng tử L với các tham số: bề rộng giếng (tính bằng đơn vị Å) và nồng độ hạt tải (tính theo đơn vị $10^{11}$ $cm^{-2}$) như

sau: (L, $p_s$) = (41.1, 0.9), (53.6, 1.2), (62.3, 1.6), (72.7, 1.5). Trong mô hình này, do độ lệch mạng là nhỏ $\in_{\|} = 0.006$ nên tán xạ do độ nhám bề mặt vẫn đóng vai trò chủ đạo [10], $m_z = m^* = 0.023m_e$, $\Delta = 3.2$ Å, $\Lambda = 15$ Å. Các điểm tròn đen tương ứng là các giá trị thực nghiệm đo được trong công trình [10], đường liền nét là độ linh động tổng cộng gây ra bởi tất cả các cơ chế tán xạ tính theo lý thuyết của chúng tôi.

Quan sát hình 1 ta có thể thấy, lý thuyết mà tác giả xây dựng đã giải thích thành công các kết quả thực nghiệm về sự phụ thuộc của độ linh động vào bề rộng kênh dẫn trong giếng lượng tử pha tạp đối xứng hai bên.

Tiếp tục chúng tôi xét hệ số nâng cao độ linh động Q phụ thuộc vào bề rộng của giếng lượng tử trong hình 2. Các số liệu thực nghiệm được lấy trong công trình [7,11]. Tại giá trị bề rộng giếng lượng tử L = 200 Å, nồng độ hạt tải $p_s = 0,9.10^{12} cm^{-2}$, Ls = 100 Å, độ linh động xác định theo thực nghiệm trong [7] đối với mô hình pha tạp 1 phía là $\mu_{\exp}^{1S} \approx 4.10^3 cm^2/Vs$. Trong khi đó với cùng tham số, độ linh động xác định theo thực nghiệm trong mô hình giếng lượng tử pha tạp hai phía [11] là $\mu_{\exp}^{2S} \approx 10^4 cm^2/Vs$. Từ đó ta có kết quả thực nghiệm $Q^{(L,P_s,\Lambda)} = \dfrac{\mu_{tot}^{2s}(L,p_s;\Delta,\Lambda)}{\mu_{tot}^{1s}(L,p_s;\Delta,\Lambda)} \approx 2,43.$ Trên hình 2 là kết quả tính toán lý thuyết của nhóm chúng tôi. Tại vị trí chấm tròn đen là kết quả tính toán tỉ số độ linh động giữa hai mô hình pha tạp đối xứng hai phía và pha tạp 1 phía.

Kết quả tính toán cho thấy: pha tạp đối xứng hai phía có thể nâng cao độ linh động của hạt tải lên gấp khoảng hai lần so với pha tạp 1 phía. Tại giá trị $L = 200A^0$ thì $Q \approx 2.43$. Kết quả này phù hợp khá tốt với thực nghiệm.




**Hình 2. Độ linh động của mô hình pha tạp 1 phía (đường đứt nét), độ linh động trong mô hình pha tạp 2 phía (đường liền nét, màu xanh Green)**

**và tỉ số giữa chúng (đường màu xanh Blue)**

## 3. KẾT LUẬN

Chúng tôi đã tìm ra được biểu thức giải tích về sự phân bố của hạt tải trong giếng lượng tử pha tạp 2 bên bằng việc đưa vào các hàm phụ. Chúng tôi cũng chỉ ra ảnh hưởng của điều biến đối xứng do pha tạp 2 bên lên sự phân bố của hạt tải phụ thuộc vào hàm lượng pha tạp và độ rộng kênh dẫn. Chúng tôi cũng so sánh tính toán lý thuyết của mình với thực nghiệm [7,11], kết quả cho thấy tính toán lý thuyết của chúng tôi cho kết quả khá phù hợp với thực nghiệm.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] T. Ando, A. B. Fowler and F. Stern (1995), *Electronic Proper- ties of Two-Dimensional Systems*, Reviews of Modern Physics, Vol. 54, No. 2, 1982, pp. 437-672.

[2] Feenstra R. M. and Lutz M. A (1995), *Scattering from strain variations in high - mobility Si/SiGe heterostructures,* J. Appl. Phys. 78, 6091.

[3] Fischetti M. V., Jin S. and Tang T. W. (2007), *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 54, no. 9, pp. 2191-2003.

[4] R. J. H. Morris, T. J. Grasby, R. Hammond, M. Myronov, O. A. Mironov, D. R. Leadley, T. E. Whall, E. H. C. Parker, M. T. Currie, C. W. Leitz, and E. A. Fitzgerald (2004), *Electrical measurements of structural defects in Cd0.9Zn0.1Te by atomic force microscopy based methods*, Semicond. Sci. Technol. 19, L106.

[5] Myronov. M., Sawano. K., and Shiraki. Y. (2006), *Enhancement of hole mobility and carrier density in Ge quantum well of SiGe heterostructure via implementation of double side modulation doping*, Appl. Phys. Lett. 88, 252115.

[6] Gerl. C., Schmult. S., Tranitz. H. P., Mitzkus. C. and Wegscheider. W. (2005), *Carbon doped symmetric GaAs/AlGaAs quantum wells with hole mobilities beyond 106 $cm^2/Vs$*, Appl. Phys. Lett Vol. 86, 252105.

[7] Gerl. C., Schmult. S., Wurstbauer. U., Tranitz. H.P., Mitzkus. C. and Wegscheider. W. (2006), *Carbon-doped high mobility hole gases on (001) and (110) GaAs*, Physica E Vol. 32, 258.

[8] F. Szmulowicz, S. Elhamri, H. J. Haugan, G. J. Brown, and W. C.Mitchel (2007), *Demonstration of interface-scattering-limited electron mobilities in In As/Ga Sb superlattices*, J. Appl. Phys. 101, 043706.

[9] Doan Nhat Quang, Nguyen Huyen Tung, Le Tuan, Nguyen Trung Hong, and Tran Thi Hai (2011), *Two side doping effects on the mobility of carriers in square quantum wells*, Journal of the Physical Society of Japan 80 (4) 044714.

[10] Gold. A. (1987), *Electronic transport properties of a two-dimensional electron gas in a silicon quantum-well structure at low temperature*, Phys. Rev. B. 35, 723.

[11] Y. H. Xie, Don Monroe, E. A. Fitzgerald, P. J. Silverman, F. A. Thiel, and G. P. Watson (1993), *Very high mobility two dimensional hole gas in Si/Ge x Si1−x /Ge structures grown by molecular beam epitaxy*, Appl. Phys. Lett 63, 2263.

# KEY SCATTERING MECHANISMS AFFECTING MOBILITY OF CARRIERS IN THE DOUBLE-SIDE DOPED SQUARE QUANTUM WELLS

**Le Van Hieu, Tran Thi Hai**

ABSTRACT

*We study of the effects from two-side (2S) doing on low-temperature transport in square quantum wells (QWs). We used variational approach to obtain analytic expressions for the carrier distribution, and autocorrelation functions for various scattering mechanisms. We find that the QW mobility may be enhanced by 2S doping. We examine the dependence of the enhancement factor on the channel width and density carrier. Our theory is able to well reproduce the recent experimental data on transport in 2S-doped square QWs, e.g., the mobility dependence on the enhancement factor, which have not been explained so far.*

**Keywords:** *Two-side (2S) doing, variational approach, enhancement factor, quantum wells.*

# MỘT VÀI KẾT QUẢ VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN *B*-MÊTRIC

**Đinh Huy Hoàng[1], Đỗ Thị Thủy[2]**

TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một vài kết quả mới về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea và T-co yếu suy rộng kiểu Kannan trong không gian b-mêtric. Các kết quả trong bài báo là mở rộng thực sự của các kết quả chính trong các tài liệu [9,10].*

**Từ khóa:** *Điểm bất động, không gian mêtric đầy đủ, không gian b-mêtric, T-co yếu.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các khái niệm về ánh xạ *T*-co yếu suy rộng kiểu Kannan, kiểu Chatterjea trong không gian mêtric đã được giới thiệu và nghiên cứu bởi A. Razani, V. Paraneh [10] vào năm 2013. Sau đó (2014), Z.Mustaja và các cộng sự [9] đã mở rộng kết quả của Razami, Parvaneh [10] về sự tồn tại điểm bất động của ánh xạ *T*-co yếu suy rộng kiểu Kannan, Chatterjea trong không gian mêtric cho không gian *b*-mêtric. Trong bài báo, chúng tôi đã chứng minh được một định lý về sự tồn tại điểm bất động trong không gian *b*-mêtric.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Một số khái niệm cơ bản

Mục này trình bày một số định nghĩa về các loại ánh xạ co, *T*-co, *T*-co yếu suy rộng trong không gian mêtric cùng một vài định nghĩa trong không gian *b*-mêtric mà chúng ta cần dùng trong bài báo.

*2.1.1. Định nghĩa 1*

Giả sử $(X,d)$ là không gian mêtric và $f:X\to X$.

1) ([5]). Ánh xạ $f$ được gọi là *co kiểu Kannan* nếu tồn tại $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(fx,fy)\le\alpha[d(x,fx)+d(y,fy)],\ \forall x,y\in X$$

2) ([1]). Ánh xạ $f$ được gọi là *co kiểu Chatterjea* nếu tồn tại $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(fx,fy)\le\alpha[d(x,fy)+d(y,fx)],\ \forall x,y\in X$$

[1] *Giảng viên khoa Sư phạm Toán, Trường Đại học Vinh*
[2] *Giáo viên Trường Trung học phổ thông Quảng Xương 2, Thanh Hóa*

*2.1.2. Định nghĩa 2*

Giả sử $(X,d)$ là không gian mêtric, $\varphi:\ [0,\infty)^2 \to [0;\infty)$ là hàm liên tục sao cho $\varphi(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y=0$ và $f: X \to X$ là ánh xạ.

1) ([2]). Ánh xạ $f$ được gọi là *co yếu kiểu Chatterjea* nếu

$$d(fx,fy) \le \frac{1}{2}[d(x,fy)+d(y,fx)]\text{-}\varphi(d(x,fy),d(y,fx)),\ \forall x,y \in X$$

2) ([10]). Ánh xạ $f$ được gọi là *co yếu kiểu Kannan* nếu

$$d(fx,fy) \le \frac{1}{2}[d(x,fx)+d(y,fy)]\text{-}\varphi(d(x,fx),d(y,fy)),\ \forall x,y \in X$$

*2.1.3. Định nghĩa 3*

Giả sử $(X,d)$ là không gian mêtric, $T$ và $f$ là hai ánh xạ từ X vào X.

1) ([8]). Ánh xạ $f$ được gọi là *T-co kiểu Kannan* nếu tồn tại $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(Tfx,Tfy) \le \alpha[d(Tx,Tfx)+d(Ty,Tfy)],\ \forall x,y \in X$$

2) ([10]). Ánh xạ $f$ được gọi là *T-co kiểu Chatterjea* nếu tồn tại $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho

$$d(Tfx,Tfy) \le \alpha[d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)],\ \forall x,y \in X$$

*2.1.4. Định nghĩa 4 ([6])*

Hàm $\psi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ được gọi là *hàm chuyển đổi khoảng cách* nếu $\psi$ liên tục, tăng ngặt và $\psi(0)=0$.

Trong định nghĩa sau, $\psi$ là hàm chuyển đổi khoảng cách, còn $\varphi:[0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ là hàm liên tục và $\varphi(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y=0$.

*2.1.5. Định nghĩa 5 ([10])*

Giả sử $(X,d)$ là không gian mêtric, $T$ và $f$ là hai ánh xạ từ X vào X.

1) Ánh xạ $f$ được gọi là *T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea* nếu

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)}{2}\right)\text{-}\varphi(d(Tx,Tfy),d(Ty,Tfx)),\ \forall x,y \in X$$

2) Ánh xạ $f$ được gọi là *T-co yếu suy rộng kiểu Kannan* nếu

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx,Tfx)+d(Ty,Tfy)}{2}\right)\text{-}\varphi(d(Tx,Tfx),d(Ty,Tfy)),\ \forall x,y \in X$$

Khi lấy $\psi:[0,\infty) \to [0,\infty)$ là ánh xạ đồng nhất, ta thấy rằng các khái niệm ánh xạ *T-co* yếu kiểu Chatterjea và *T-co* yếu kiểu Kannan là trường hợp đặc biệt của khái niệm ánh xạ *T-co* yếu suy rộng kiểu Chatterjea và *T-co* yếu suy rộng kiểu Kannan tương ứng.

*2.1.6. Định nghĩa 6 ([3])*

Giả sử $X$ là tập khác rỗng và số thực $s \geq 1$. Hàm $d : X \times X \to [0, \infty)$ được gọi là *b-mêtric* nếu với mọi $x, y, z \in X$, ta có

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$ (bất đẳng thức tam giác).

Tập $X$ cùng với một *b-mêtric* trên nó được gọi là *không gian b-mêtric với tham số s,* nói gọn là *không gian b-mêtric* và kí hiệu bởi $(X, d)$ hoặc $X$.

*Chú ý:*

1) Từ đây về sau, khi nói tới không gian *b-mêtric* ta luôn hiểu tham số của nó là $s \geq 1$.

2) Từ định nghĩa không gian mêtric và không gian *b-mêtric* ta thấy rằng, không gian mêtric là trường hợp đặc biệt của không gian *b-mêtric* khi $s = 1$.

*2.1.7. Định nghĩa 7 ([3])*

Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong không gian *b-mêtric* $(X, d)$.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *b-hội tụ* (nói gọn là *hội tụ*) tới $x \in X$ và được kí hiệu bởi $x_n \to x$ hoặc $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $n_0$ sao cho $d(x_n, x) < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Nói cách khác, $x_n \to x$ khi và chỉ khi $d(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *dãy Cauchy* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $n_0$ sao cho $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq n_0$.

Không gian *b-mêtric* được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong nó đều hội tụ.

*2.1.8. Bổ đề 1*

*Giả sử $\{x_n\}$ là dãy trong không gian b-mêtric $(X, d)$ và $x_n \to x \in X$. Khi đó,*

*1) $\{x_n\}$ là dãy Cauchy;*

*2) $x$ là duy nhất;*

*3)* $\frac{1}{s} d(x, y) \leq \liminf_{n \to \infty} d(x_n, y) \leq \limsup_{n \to \infty} d(x_n, y) \leq s d(x, y), \forall y \in X.$

*2.1.9. Định nghĩa 8*

Giả sử $(X, d)$ là không gian *b-mêtric*, ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là *liên tục* nếu mọi dãy $\{x_n\}$ trong $X$ mà $x_n \to x$ ta có $fx_n \to fx$.

**2.2. Một vài kết quả về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ T-co**

Suy rộng trong không gian *b*-mêtric

Ta kí hiệu

$\mathcal{L} = \{\psi : [0,\infty) \to [0,\infty) | \psi$ là hàm chuyển đổi khoảng cách$\}$.

$$\Phi = \Big\{\varphi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty) | \varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ và}$$

$$\varphi(\liminf_{n\to\infty} x_n, \liminf_{n\to\infty} y_n) \le \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n, y_n)\Big\}.$$

*2.2.1. Định lý 1*

*Giả sử* $(X,d)$ *là không gian b-mêtric đầy đủ,* $T$ và $f$ là hai ánh xạ từ X vào X *thỏa mãn:*

*i)* $T$ *đơn ánh và liên tục;*

*ii) Tồn tại* $\psi \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \Phi$ *và các hằng số* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right]$ *sao cho*

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi(\max\{\alpha_1 s d(Tx,Ty), \alpha_2 d(Tx,Tfy) + \alpha_3 d(Ty,Tfx), \alpha_4 s[d(Tx,Tfx) + d(Ty,Tfy)]\})$$
$$-\varphi(\alpha_2 d(Tx,Tfy) + \alpha_4 d(Tx,Tfx), \alpha_3 d(Ty,Tfx) + \alpha_4 d(Ty,Tfy)) \quad (2.2.1)$$

*với mọi* $x, y \in X$.

*Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng hoặc:*

*Với mỗi* $x_0 \in X$, *dãy* $\{Tf^n x_0\}$ *hội tụ.*

*2) Nếu* $T$ *là ánh xạ hội tụ dãy con thì* $f$ *có duy nhất điểm bất động trong* $X$.

*3) Nếu* $T$ *là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi* $x_0 \in X$, *dãy* $\{f^n x_0\}$ *hội tụ tới điểm bất động của* $f$.

*Chứng minh.*

1) Lấy bất kỳ $x_0 \in X$. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}$ bởi $x_{n+1} = fx_n = f^{n+1}x_0 \ \forall n = 0,1,...$

Đặt $y_n = Tx_n, n = 0,1,...$

Đầu tiên, ta chứng minh $d(y_n, y_{n+1}) \to 0$ khi $n \to \infty$. Từ điều kiện (2.2.1), với mọi $n = 1,2,...$ ta có:

$$\psi(d(y_n, y_{n+1})) = \psi(d(Tfx_{n-1}, Tfx_n))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1 s d(y_n, y_{n-1}), \alpha_2 d(y_n, y_n) + \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}), \alpha_4 s(d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n-1}, y_n))\})$$
$$-\varphi(\alpha_4 d(y_n, y_{n+1}), \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}) + \alpha_4 d(y_{n-1}, y_n))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\} s(d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})))$$
$$-\varphi(\alpha_4 d(y_n, y_{n+1}), \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}) + \alpha_4 d(y_{n-1}, y_n)). \quad (2.2.2)$$

Đặt $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ thì $\alpha \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right]$. Từ $\varphi$ là hàm không âm và $\psi$ là hàm tăng cùng (2.2.2) suy ra $d(y_{n+1}, y_n) \le \alpha s(d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1}))$ với mọi $n = 1,2,...$

Do đó, $d(y_{n+1}, y_n) \le \dfrac{\alpha s}{1-\alpha s} d(y_{n-1}, y_n) \ \ \forall n = 1,2,...$

Từ $\alpha s \le \dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{\alpha s}{1-\alpha s} \le 1$ nên $d(y_{n+1}, y_n) \le d(y_{n-1}, y_n)$ với mọi $n = 1,2,...$ Như vậy $\{d(y_n, y_{n+1})\}$ là dãy các số thực không âm và giảm. Do đó, nó hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_{n+1}, y_n) = \mathrm{r} \ge 0.$ Từ (2.2.2) và tính chất của ánh xạ $\varphi$, cho $n \to \infty$, ta được

$$\psi(\mathrm{r}) \le \psi(2\alpha s\mathrm{r}) - \varphi(\alpha_4 \mathrm{r}, \alpha_4 \mathrm{r} + \liminf_{n\to\infty} \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}))$$

$$\le \psi(\mathrm{r}) - \varphi(\alpha_4 \mathrm{r}, \alpha_4 \mathrm{r} + \liminf_{n\to\infty} \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}))$$

Từ đó $\varphi(\alpha_4 \mathrm{r}, \alpha_4 \mathrm{r} + \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1})) = 0.$ Kết hợp với tính chất của $\varphi$ suy ra

$$\alpha_4 \mathrm{r} = \alpha_3 \liminf_{n\to\infty} d(y_{n-1}, y_{n+1}) = 0. \qquad (2.2.3)$$

Nếu $\alpha_4 \ne 0$ thì $\mathrm{r} = 0$. Giả sử $\alpha_4 = 0$. Khi đó, nếu $\alpha_3 = 0$ thì theo điều kiện (2.2.1) suy ra

$$\psi(d(y_{n+1}, y_n)) \le \psi(\alpha_1 s d(y_n, y_{n-1})) \ \ \forall n = 1,2,...$$

Do đó, $\psi(\mathrm{r}) \le \psi(\alpha_1 s\mathrm{r})$. Do $\psi$ tăng ngặt nên $\mathrm{r} \le \alpha_1 s\mathrm{r}$. Mà $\alpha_1 \le \dfrac{1}{s^2+1} < \dfrac{1}{s}$ nên $\mathrm{r} = 0$. Nếu $\alpha_4 = 0$ và $\alpha_3 \ne 0$ thì từ (2.2.3) ta có $\liminf\limits_{n\to\infty} d(y_{n-1}, y_{n+1}) = 0$. Từ (2.2.1) và $\psi$ là hàm tăng nên:

$$d(y_{n+1}, y_n) \le \alpha_1 s(d(y_n, y_{n-1}) + \alpha_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}) \ \ \forall n = 1,2,...$$

Cho $n \to \infty$ ta có $\mathrm{r} \le \alpha_1 s\mathrm{r} + \alpha_3 \liminf\limits_{n\to\infty} d(y_{n-1}, y_{n+1}) = \alpha_1 s\mathrm{r}$. Tương tự như trên ta có được $\mathrm{r} = 0$. Như vậy ta luôn có

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = \mathrm{r} = 0 \qquad (2.2.4)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Giả sử $\{y_n\}$ không là dãy Cauchy. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho có thể tìm được hai dãy con $\{y_{n_k}\}$ và $\{y_{m_k}\}$ của dãy $\{y_n\}$ thỏa mãn $n_k$ là chỉ số bé nhất để cho $n_k > m_k > k$ và:

$$d(y_{n_k}, y_{m_k}) \ge \varepsilon \qquad (2.2.5)$$

Từ đó suy ra

$$d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) < \varepsilon, \ \forall k = 1,2,... \qquad (2.2.6)$$

Từ (2.2.5), (2.2.6) và bất đẳng thức tam giác ta có

$$\varepsilon \le d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k})] < s\varepsilon + sd(y_{n_k-1}, y_{n_k}), \ \forall k = 1,2,...$$

Lấy $\limsup\limits_{k\to\infty}$ hai vế ta được

$$\varepsilon \le \limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s\varepsilon \tag{2.2.7}$$

Từ $\varepsilon \le d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k})]$ cùng với (2.2.6) suy ra

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) \le \varepsilon \tag{2.2.8}$$

Mặt khác, từ $\varepsilon \le d(y_{m_k}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k}, y_{m_k-1}) + d(y_{m_k-1}, y_{n_k})]$ và

$$d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) \le s[d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{m_k}, y_{n_k})]$$

cùng (2.2.4) và (2.2.7) suy ra

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) \le s^2\varepsilon \tag{2.2.9}$$

Tương tự như trên, ta chứng minh được rằng

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \liminf_{k\to\infty} d(y_{m_k}, y_{n_k-1}) \le \varepsilon \tag{2.2.10}$$

Và

$$\frac{\varepsilon}{s} \le \liminf_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) \le s^2\varepsilon \tag{2.2.11}$$

Từ $d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}) \le s[d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{m_k}, y_{n_k-1})]$ cùng (2.2.4) và (2.2.8) ta có

$$\limsup_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}) \le s\varepsilon \tag{2.2.12}$$

Áp dụng (2.2.5) và điều kiện (2.2.1) ta có

$$\psi(\varepsilon) \le \psi(d(y_{m_k}, y_{n_k})) = \psi(d(Tfx_{m_k-1}, Tfx_{n_k-1}))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1 s d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}), \alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}),$$
$$\alpha_4 s(d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k}))\})$$
$$-\varphi(\alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_4 d(y_{m_k-1}, y_{m_k}), \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) + \alpha_4 d(y_{n_k-1}, y_{n_k})).$$

Từ (2.2.4), (2.2.10), (2.2.11), (2.2.12) và sử dụng tính chất của $\varphi, \psi$ suy ra

$$\psi(\varepsilon) \le \psi(\limsup_{k\to\infty}(\max\{\alpha_1 s d(y_{m_k-1}, y_{n_k-1}), \alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}),$$
$$\alpha_4 s(d(y_{m_k-1}, y_{m_k}) + d(y_{n_k-1}, y_{n_k}))\}))$$
$$-\varphi(\liminf_{k\to\infty}(\alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) + \alpha_4 d(y_{m_k-1}, y_{m_k})), \liminf_{k\to\infty}(\alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) + \alpha_4 d(y_{n_k-1}, y_{n_k})))$$
$$\le \psi(\max\{\alpha_1 s^2\varepsilon, \alpha_2 s^2\varepsilon + \alpha_3\varepsilon, 0\}) - \varphi(\liminf_{k\to\infty} \alpha_2 d(y_{m_k-1}, y_{n_k}),$$
$$\liminf_{k\to\infty} \alpha_3 d(y_{n_k-1}, y_{m_k})) \tag{2.2.13}$$

Mặt khác, $\max\{\alpha_1 s^2, \alpha_2 s^2 + \alpha_3\} \le 1$ nên $\psi(\varepsilon) \ge \psi(\max\{\alpha_1 s^2\varepsilon, \alpha_2 s^2\varepsilon + \alpha_3\varepsilon, 0\})$ . Kết hợp với (2.2.13) và tính chất của $\varphi$ ta có:

$$\alpha_2 \liminf_{k\to\infty} d(y_{m_k-1}, y_{n_k}) = 0 \tag{2.2.14}$$

và

$$\alpha_3 \liminf_{k\to\infty} d(y_{n_k-1}, y_{m_k}) = 0 \tag{2.2.15}$$

Từ (2.2.10), (2.2.11), (2.2.14) và (2.2.15) suy ra $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Từ (2.2.13) ta có $\psi(\varepsilon) \le \psi(\alpha_1 s^2 \varepsilon)$. Do đó, $\varepsilon \le \alpha_1 s^2 \varepsilon$ hay $\alpha_1 \ge \frac{1}{s^2}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\alpha_1 \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right]$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $\{y_n\}$ là dãy Cauchy. Vì $(X,d)$ đầy đủ nên tồn tại $y \in X$ sao cho $y_n \to y$ khi $n \to \infty$, tức là

$$\lim_{n\to\infty} Tf^{n+1}x_0 = \lim_{n\to\infty} Tfx_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = y \tag{2.2.16}$$

2) Bây giờ, giả sử $T$ là ánh xạ hội tụ dãy con. Ta chứng minh $f$ có điểm bất động. Vì $T$ hội tụ dãy con và $\{Tfx_n\}$ là dãy hội tụ nên $\{fx_n\}$ có dãy con $\{fx_{n_i}\}$ sao cho $fx_{n_i} \to x \in X$ khi $n_i \to \infty$. Do $T$ liên tục nên $Tfx_{n_i} \to Tx$. Kết hợp với (2.2.16) suy ra $y = Tx$. Sử dụng điều kiện (2.2.1) ta có

$$\psi\left(\frac{1}{s}d(Tfx,Ty)\right) \le \psi(\liminf_{n\to\infty} d(Tfx,Tfx_n)) \le \liminf_{n\to\infty} \psi(d(Tfx,Tfx_n))$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}(\psi(\max\{\alpha_1 sd(y,y_n), \alpha_2 d(y,y_{n+1}) + +\alpha_3 d(y_n,Tfx), \alpha_4 s(d(y,Tfx)+d(y_n,y_{n+1}))\}))$$

$$\le \psi(\limsup_{n\to\infty}(\max\{\alpha_1 sd(y,y_n), \alpha_2 d(y,y_{n+1}) + +\alpha_3 d(y_n,Tfx), \alpha_4 s(d(y,Tfx)+d(y_n,y_{n+1}))\}))$$

$$\le \psi(\max\{\alpha_3 sd(y,Tfx), \alpha_4 sd(y,Tfx)\}) \le \psi\left(\frac{s}{s^2+1}d(y,Tfx)\right).$$

Vì $\psi$ là hàm tăng ngặt nên từ bất đẳng thức trên ta có: $d(y,Tfx) = 0$ hay $Tx = Tfx$. Vì $T$ đơn ánh nên $x = fx$ hay $x$ là điểm bất động của $f$.

Cuối cùng, giả sử $x$ và $x'$ là hai điểm bất động của $f$. Theo điều kiện (2.2.1) ta có

$$\psi(d(Tx,Tx')) = \psi(d(Tfx,Tfx')) \le \psi(\max\{\alpha_1 sd(Tx,Tx'), \alpha_2 d(Tx,Tx') + \alpha_3 d(Tx',Tx)$$

$$+\alpha_4 s(d(Tx,Tx)+d(Tx',Tx')\}) - \varphi(\alpha_2 d(Tx,Tx'), \alpha_3 d(Tx,Tx'))$$

$$= \psi(\max\{\alpha_1 s, \alpha_2+\alpha_3\} d(Tx,Tx')) - \varphi(\alpha_2 d(Tx,Tx'), \alpha_3 d(Tx,Tx')) \tag{2.2.17}$$

Vì $\max\{\alpha_1 s, \alpha_2+\alpha_3\} \le 1$, $\psi$ là hàm tăng ngặt nên:

$$\varphi(\alpha_2 d(Tx,Tx'), \alpha_3 d(Tx,Tx')) = 0$$

Do đó,

$$\alpha_2 d(Tx,Tx') = \alpha_3 d(Tx,Tx')) = 0 \tag{2.2.18}$$

Nếu $\alpha_2 \neq 0$ hoặc $\alpha_3 \neq 0$ thì từ (2.2.18) ta có $d(Tx,Tx')=0$. Nếu $\alpha_2=\alpha_3=0$ thì từ (2.2.17), kết hợp với $\alpha_1<\frac{1}{s}$ và tính chất của hàm $\psi$ ta có $d(Tx,Tx')=0$. Như vậy, ta luôn có $d(Tx,Tx')=0$, tức $Tx=Tx'$. Do $T$ đơn ánh nên $x=x'$. Vậy điểm bất động của $f$ là duy nhất.

3) Giả sử $T$ là ánh xạ hội tụ dãy. Khi đó, trong chứng minh 2) ở trên thay $n_i$ bởi $n$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f^n x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} fx_{n-1} = x$.

Sau đây là vài hệ quả của Định lý 2.2.1.

*2.2.2. Hệ quả 1 ([9], Định lý 4)*

*Giả sử $(X,d)$ là không gian b-mêtric đầy đủ, $T$ và $f: X\to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn:*

*i) $T$ đơn ánh và liên tục;*

*ii) Tồn tại $\psi\in\mathcal{L}$, $\varphi\in\Phi$ sao cho với mọi $x,y\in X$ ta có*

$$\psi(sd(Tfx,Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)}{s+1}\right) - \varphi(d(Tx,Tfy),d(Ty,Tfx)) \quad (2.2.19)$$

*Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:*

*1) Với mỗi $x_0\in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.*

*2) Nếu $T$ là ánh xạ hội tụ dãy con thì $f$ có duy nhất điểm bất động trong $X$.*

*3) Nếu $T$ là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0\in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của $f$.*

*Chứng minh.*

Ta xác định các hàm $\psi_1:[0,\infty)\to[0,\infty), \varphi_1:[0,\infty)^2\to[0,\infty)$ bởi các công thức:

$$\psi_1(t)=\psi(st),\ \forall t\in[0,\infty)$$

$$\varphi_1(t,u)=\varphi(s(s+1)t,s(s+1)u),\ \forall (t,u)\in[0,\infty)^2.$$

Khi đó, từ $s\ge 1, \psi\in\mathcal{L}$ và $\varphi\in\Phi$ suy ra $\psi_1\in\mathcal{L}$, $\varphi_1\in\Phi$. Mặt khác, từ điều kiện (2.2.19) ta có

$$\psi_1(d(Tfx,Tfy)) = \psi(sd(Tfx,Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)}{s+1}\right) - \varphi(d(Tx,Tfy),d(Ty,Tfx))$$

$$= \psi_1(\alpha[d(Tx,Tfy)+d(Ty,Tfx)]) - \varphi_1(\alpha d(Tx,Tfy),\alpha d(Ty,Tfx))$$

với mọi $x,y\in X$, trong đó $\alpha=\frac{1}{s(s+1)}$. Từ đó suy ra

$$\psi(d(Tfx,Tfy)) \le \psi(\max\{\alpha_1 sd(Tx,Ty),\alpha_2 d(Tx,Tfy)+\alpha_3 d(Ty,Tfx),\alpha_4 s[d(Tx,Tfx)+d(Ty,Tfy)]\})$$
$$-\varphi_1(\alpha_2 d(Tx,Tfy)+\alpha_4 d(Tx,Tfx),\alpha_3 d(Ty,Tfx)+\alpha_4 d(Ty,Tfy))$$

Với mọi $x, y \in X$, trong đó $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = \frac{1}{s(s+1)}, \alpha_4 = 0$. Như vậy các điều kiện của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn. Do đó, các khẳng định của Hệ quả 2.2.2 được suy ra từ Định lý 2.2.1.

*2.2.3. Hệ quả 2 ([9], Định lý 5)*

*Giả sử $(X, d)$ là không gian b-mêtric đầy đủ, $T$ và $f : X \to X$ là hai ánh xạ thỏa mãn:*

*i) $T$ đơn ánh và liên tục;*

*ii) Tồn tại $\psi \in \mathcal{L}$, $\varphi \in \Phi$ sao cho với mọi $x, y \in X$ ta có*

$$\psi(d(Tfx, Tfy)) \le \psi\left(\frac{d(Tx, Tfx) + d(Ty, Tfy)}{s+1}\right) - \varphi(d(Tx, Tfx), d(Ty, Tfy)) \quad (2.2.20)$$

*Khi đó, các khẳng định sau đây là đúng:*

*1) Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.*

*2) Nếu $T$ là ánh xạ hội tụ dãy con thì $f$ có duy nhất điểm bất động trong $X$.*

*3) Nếu $T$ là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của $f$.*

*Chứng minh.*

Ta xác định các hàm $\psi_1 : [0, \infty) \to [0, \infty), \varphi_1 : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ bởi các công thức

$$\psi_1(t) = \psi(t), \ \forall t \in [0, \infty)$$

$$\varphi_1(t, u) = \varphi(s(s+1)t, s(s+1)u), \ \forall (t, u) \in [0, \infty)^2.$$

Khi đó, từ $\psi \in \mathcal{L}$ và $\varphi \in \Phi$ suy ra $\psi_1 \in \mathcal{L}$, $\varphi_1 \in \Phi$. Tương tự như chứng minh Hệ quả 2.2.2 ta chứng minh được các điều kiện của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn với $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{1}{s(s+1)}$. Do đó, các khẳng định của Hệ quả 2.2.3 được suy ra từ Định lý 2.2.1.

Trong các Hệ quả 2.2.2 và Hệ quả 2.2.3 lấy $s = 1$ ta được hệ quả sau:

*2.2.4. Hệ quả 3 ([10])*

*Giả sử $(X, d)$ là không gian mêtric đầy đủ, $T$ và $f : X \to X$ là hai ánh xạ sao cho $T$ đơn ánh và liên tục. Khi đó, nếu $f$ là ánh xạ T-co yếu suy rộng kiểu Chatterjea hoặc kiểu Kannan thì các khẳng định sau đây là đúng:*

*1) Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{Tf^n x_0\}$ hội tụ.*

*2) Nếu $T$ là ánh xạ hội tụ dãy con thì $f$ có duy nhất điểm bất động trong $X$.*

*3) Nếu $T$ là ánh xạ hội tụ dãy thì với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{f^n x_0\}$ hội tụ tới điểm bất động của $f$.*

Ví dụ sau đây chứng tỏ Định lý 2.2.1 thực sự tổng quát hơn Định lý 4 và Định lý 5 trong [9].

*2.2.5. Ví dụ*

Giả sử $X=\{1,2,3,4\}$ và $d: X\times X\to\mathbb{R}$ là hàm được cho bởi

$d(x,y)=d(y,x)\ \ \forall x,y\in X$;

$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

$d(1,2)=d(1,4)=1, d(2,4)=\frac{5}{2}$;

$d(1,3)=d(2,3)=d(3,4)=\frac{9}{4}$.

Khi đó, $d$ là $b$-mêtric trên $X$ với $s=\frac{5}{4}$ và $(X,d)$ là không gian $b$-mêtric đầy đủ.

Giả sử $T$ và $f: X\to X$ là hai ánh xạ được cho bởi

$f1=f2=f3=1, f4=3,$

$T1=1, T2=2, T3=4, T4=3.$

Ta thấy $T$ đơn ánh và liên tục, tức là điều kiện i) của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn.

Lấy $\alpha_1=\frac{16}{45}, \alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$. Khi đó $\alpha_1=\frac{1}{s(s+1)}$. Ta có

$d(Tf1,Tf2)=d(Tf1,Tf3)=d(Tf2,Tf3)=0.$

$d(Tf1,Tf4)=d(Tf2,Tf4)=d(Tf3,Tf4)=1=\frac{16}{45}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}$.

Vì thế $T$ và $f$ thỏa mãn điều kiện co trong Định lý 2.2.1 với mọi $x,y\in X$, $\psi\in\mathcal{L}$, $\varphi\in\Phi$. Do vậy, Định lý 2.2.1 được áp dụng cho $T$ và $f$. Bây giờ, ta chỉ ra rằng Định lý 4 và Định lý 5 trong [9] không thể áp dụng được cho $T$ và $f$. Thật vậy,

Chọn $x=3, y=4$ thì từ điều kiện co trong Định lý 4 [9] ta có

$$\psi(sd(Tf3,Tf4))=\psi\left(\frac{5}{4}\right)\le\psi\left(\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}\right)-\varphi\left(0,\frac{9}{4}\right)=\psi(1)-\varphi\left(0,\frac{9}{4}\right)<\psi(1).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\psi$ là hàm tăng ngặt.

Chọn $x=1, y=4$ thì từ điều kiện co trong Định lý 5 [9] ta có

$$\psi(d(Tf1,Tf4))=\psi(1)\le\psi\left(\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}\right)-\varphi\left(0,\frac{9}{4}\right)=\psi(1)-\varphi\left(0,\frac{9}{4}\right)<\psi(1)$$

Đây là một điều vô lý.

## 3. KẾT LUẬN

Bài báo đưa ra được kết quả mới đó là Định lý 2.2.1 về sự tồn tại điểm bất động của các ánh xạ *T*-co suy rộng trong không gian *b*-mêtric và một số Hệ quả của nó (Hệ quả 2.2.3, 2.2.4), các hệ quả này chính là nội dung các Định lý 4 và Định lý 5 trong tài liệu tham khảo [9]. Đồng thời đưa ra Ví dụ 2.2.5 chứng tỏ Định lý 2.2.1 là mở rộng thực sự của Định lý 4 và Định lý 5 trong tài liệu tham khảo [9].

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] K. Chatterjea (1972), *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 25, 727-730.

[2] S. Choudhury (2009), *Unique fixed point theorems for weak C-contractive mappings,* Kathamandu Univ. J. Sci. Eng. Technol. 5(1), 6-13.

[3] S. Czerwik (1993), *Contraction mappings in b-mêtric spaces,* Acta Math. Inform Univ. Ostrav. 1, 5-11.

[4] N. Hussain, V. Parvaneh, R. Roshan, Z. Kadelburg (2013), *Fixed points of cyclic weakly* $(\psi,\varphi,L,A,B)$ *- Contractive mappings in ordered b-metric with applicatons,* Fixed Point Theory Apply, 256.

[5] Kannan (1968), *Some results on fixed points,* Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76.

[6] M. S. Khan, M. Sessa (1984), *Fixed point theorems by altering distances bet ween the points,* Bull. Aust. Math. Soc. 30, 1-9.

[7] M. Kir, H.Kiziltunc (2013), *On some well known fixed point theorems in b-metric,* Turkish Journal of Analysis and Number Theory, Vol. 1, No. 1, 13-16.

[8] S. Moradi (2011), *Kannan fixed point theorem on complete metric spaces and On generalized metric spaces depended on another function,* arXiv: 0903. 577vl [math.FA].

[9] Z. Mustafa, J.R. Roshan, V. Parvaneh and Z. Kadelburg (2014), *Fixed poin theorems for weakly T-Chatterjea and weakly T-Kannan contractions in b-metric spaces,* Journal of Inequalities and Applications, Vol. 1, No. 46 (2014), 1-14.

[10] A. Razani, V. Paraneh (2013), *Some fixed point theorems for weakly T-Chatterjea nd weakly T-Kannan contractive mappings in complete metric spaces,* Russ. Math. (Izv. VUZ) 57(3), 38-45.


# SOME FIXED POINT RESULTS IN *B*-METRIC SPACE

**Dinh Huy Hoang, Do Thi Thuy**


## ABSTRACT

*In this paper, we obtain some fixed point results for generalized weakly T-Kannan contractive and generalized weakly T-Chatterjea contractive mappings in b-metric spaces. The results of this paper extend and generalize well-known comparable results in the literature [9,10].*


**Keywords:** *Fixed point, complete metric spaces, b-metric space, weak T-contraction.*

# NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG MỘT SỐ YẾU TỐ ĐẾN QUÁ TRÌNH SINH TỔNG HỢP CHITINASE CỦA CHỦNG NẤM *METARHIZIUM* SP. ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ XÁC CÔN TRÙNG TẠI THANH HÓA

**Trịnh Thị Hồng**[1]

TÓM TẮT

*Nghiên cứu tiến hành với mục đích tìm ra chủng nấm có hoạt tính chitinase và điều kiện tối ưu cho quá trình sinh tổng hợp chitinase làm cơ sở khoa học cho việc sản xuất chế phẩm chitinase ứng dụng trong thực tiễn. Metarhizium sp. có hoạt tính chitinase cao nhất trong 12 chủng nấm được phân lập tại Thanh Hóa. Các điều kiện nuôi cấy thích hợp sự sinh tổng hợp chitinase đã được tối ưu trong môi trường bán rắn ở nhiệt độ 32$^0$C, pH 5,5, hàm lượng chitin trong môi trường 12% được nuôi trong 144 giờ.*

**Từ khóa:** *Metarhizium sp., chitinase, chitin.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chitin là một polysaccharide chiếm 22% - 60% trọng lượng khô của lớp vỏ côn trùng. Chitin khó bị phân hủy bởi các enzyme tiêu hóa của động vật nhưng dễ bị phân hủy bởi chitinase của vi sinh vật. Hiện nay, có rất nhiều công trình nghiên cứu chitinase được tổng hợp từ vi sinh vật do tiềm năng ứng dụng to lớn của enzyme này trong nhiều lĩnh vực khác nhau như trong thu nhận tế bào trần (thể nguyên sinh), sản xuất chitooligosaccharides, glucosamine và N-acetyl glucosamine, sản xuất thuốc trừ sâu sinh học, trong việc kiểm soát nấm kí sinh trên cây trồng [1, 4].

Nghiên cứu ảnh hưởng của một số yếu tố đến quá trình sinh tổng hợp chitinase của chủng nấm *Metarhizium* sp. làm cơ sở khoa học cho việc tạo ra chế phẩm chitinase ứng dụng trong y học, xử lý môi trường và công tác bảo vệ thực vật hướng tới nền nông nghiệp sạch, bền vững.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Vật liệu và phương pháp nghiên cứu

*2.1.1. Vật liệu nghiên cứu*

Bột chitin.
Chủng nấm *Metarhizium* được phân lập từ xác côn trùng tại Thanh Hóa.
Môi trường nuôi cấy [1,2,4]

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Môi trường cao nấm men (Cao nấm men agar - Yeast Extract Agar (YEA)): Cao nấm men 4g, Agar 20g, Glucose 20g, nước 1000ml, pH = 5,5 - 6,0, khử trùng 1atm/30 phút.

Môi trường bán rắn: Trấu 50g, cám 40g, cao nấm men 1g, $(NH_4)_2SO_4$ 0,1g, $CaCl_2$ 0,1g, KCl 0,05g, $MgSO_4.7H_2O$ 0,05g, bột chitin 10g, độ ẩm 60%. Sau khi hấp khử trùng, môi trường được chủng vào 1ml dịch huyền phù bào tử, điều chỉnh sao cho mật độ 106 bào tử/g môi trường và nuôi cấy ở nhiệt độ nghiên cứu. Độ ẩm môi trường nuôi cấy ban đầu được điều chỉnh bằng cách thay đổi thể tích nước cho vào.

*2.1.2. Phương pháp nghiên cứu*

*2.1.2.1. Xác định khả năng tổng hợp chitinase bằng phương pháp nhỏ dịch [1, 7 ,8]*

Cách tiến hành: Chuẩn bị môi trường thạch chitin, hấp khử trùng ở $121^0$C trong 30 phút. Dùng các đĩa petri vô trùng (sấy ở $160^0$C trong 120 phút) có kích thước bằng nhau, cho 20ml môi trường từ bình tam giác vào đĩa, để nguội, đục lỗ có đường kính 1cm, có thể đục 1 đến 3 lỗ trên đĩa petri. Cho 100µl dịch chiết enzyme vào 1 lỗ, đưa vào tủ lạnh từ 2 - 4h ở $5^0$C, sau đó đưa sang tủ ấm ở $30^0$C trong 24h, cho thuốc thử lugol vào, để 5 phút rồi đo kích thước vòng phân giải (D - d, cm), với D là đường kính vòng phân giải.

D-d ≥ 2,0cm: chủng nấm sợi có hoạt tính chitinase mạnh.

1.0 ≤ D-d < 2,0cm: chủng nấm sợi có hoạt tính chitinase trung bình.

D-d < 1,0cm: chủng nấm sợi có hoạt tính chitinase yếu.

*2.1.2.2. Nghiên cứu ảnh hưởng của thời gian nuôi cấy, nhiệt độ, nồng độ cơ chất (bột vỏ cua đồng) đến quá trình sinh tổng hợp chitinase của chủng nấm Metarhizium sp [1, 7 ,8]*

Nghiên cứu ảnh hưởng của thời gian nuôi cấy đến quá trình sinh tổng hợp chitinase*:* Chuẩn bị môi trường nuôi cấy bán rắn. Cấy các chủng nấm sợi. Thu dịch chiết enzyme tại các thời điểm sau nuôi cấy 24 giờ, 48 giờ, 72 giờ, 96 giờ, 120 giờ, 144 giờ, 168 giờ. Xác định sự biến thiên hoạt tính chitinase theo thời gian nuôi cấy của các chủng nấm sợi nghiên cứu bằng phương pháp nhỏ giọt.

Nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ đến quá trình sinh tổng hợp chitinase: Sử dụng môi trường bán rắn, nuôi cấy trong thời gian tối ưu đã khảo sát ở trên ở các nhiệt độ môi trường $20^O$C, $25^0$C, $30^o$C, $35^0$C, $40^0$C, $45^o$C. Tiến hành thu dịch chiết enzyme, xác định sự biến thiên hoạt tính chitinase bằng phương pháp nhỏ giọt.

Nghiên cứu ảnh hưởng của pH đến quá trình sinh tổng hợp chitinase: pH tối ưu được xác định bằng cách thực hiện phản ứng tại nhiệt độ tối ưu và sử dụng hệ đệm phù hợp như Britton và Robinson để điều chỉnh pH ở các mức 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0. Xác định hoạt tính chitinase bằng phương pháp nhỏ giọt và tìm ra pH tối ưu cho phản ứng enzyme.

Nghiên cứu ảnh hưởng của nồng độ cơ chất (bột vỏ cua) đến quá trình sinh tổng hợp chitinase: Sử dụng môi trường bán rắn, lần lượt bổ sung bột vỏ cua ở các nồng độ 0,0%, 4%, 8%, 10%, 12%. Nuôi cấy ở nhiệt độ và thời gian tối ưu đã khảo sát. Tiến hành thu dịch chiết enzyme, xác định sự biến thiên hoạt tính chitinase bằng phương pháp nhỏ giọt.

## 2.2. Kết quả nghiên cứu và thảo luận

*2.2.1. Chọn lọc chủng nấm sợi có hoạt tính chitinase cao*

Kết quả khảo sát hoạt tính enzyme chitinase của 12 chủng nấm sợi phân lập từ xác côn trùng tại Thanh Hóa được trình bày trong bảng 1.

**Bảng 1. Kết quả thử hoạt tính chitinase**

| STT | Chủng nấm | Kích thước vòng phân giải D-d (cm) | Mức độ hoạt tính |
|---|---|---|---|
| 1 | MT | 2,3 | Mạnh |
| 2 | SHTH 1.2.3 | 0,7 | Yếu |
| 3 | SHTH 1.2.4 | 0,8 | Yếu |
| 4 | F 6 | 0,0 | Không hoạt tính |
| 5 | TQX 4.1 | 1,1 | Trung bình |
| 6 | F 6.2 | 0,75 | Yếu |
| 7 | F 1.4 | 0,7 | Yếu |
| 8 | F 6.3 | 0,6 | Yếu |
| 9 | TSS | 1,35 | Trung bình |
| 10 | TTH 1 | 1,4 | Trung bình |
| 11 | F 1 | 0,1 | Yếu |
| 12 | TTH 2 | 0,0 | Không hoạt tính |

**Bảng 2. Kết quả thử hoạt tính chitinase phân chia theo mức độ**

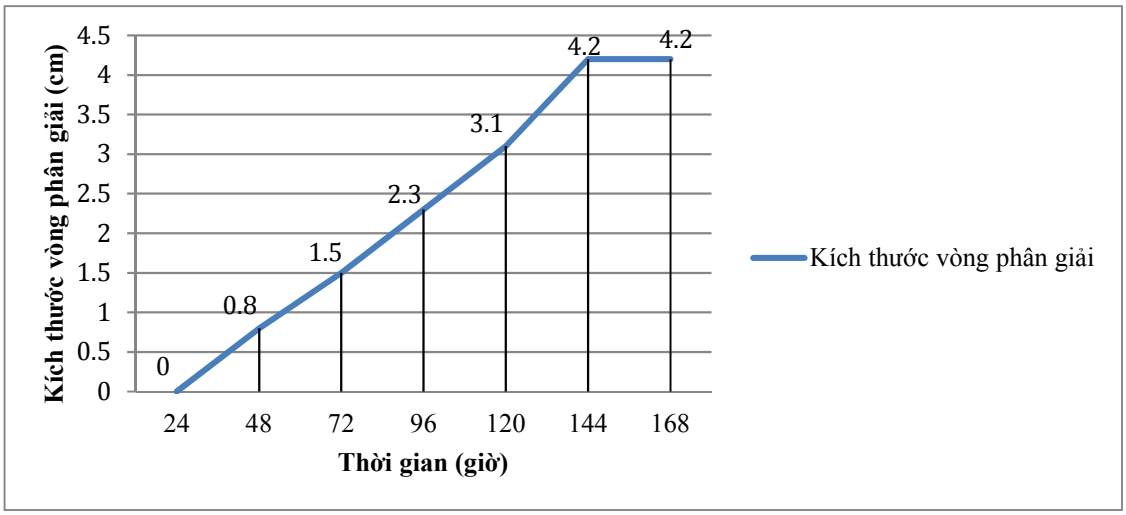
| Mức độ | Số chủng nấm | Tỷ lệ (%) |
|---|---|---|
| Mạnh | 1 | 8,33 |
| Trung bình | 3 | 25,00 |
| Yếu | 6 | 50,00 |
| Không hoạt tính | 2 | 16,67 |

Có 10/12 chủng nấm sợi có hoạt tính chitinase, trong đó: 1 chủng nấm sợi có hoạt tính mạnh là MT chiếm 8,33%; 3 chủng nấm sợi có hoạt tính trung bình là TQX 4.1, TSS và TTH 1 chiếm 25,00%; 6 chủng nấm sợi có hoạt tính yếu là SHTH 1.2.3, SHTH 1.2.4, F 6.2, F 1.4, F 6.3, F 1 chiếm 50,00% và 2 chủng nấm sợi không có hoạt tính là F 6 và TTH 2 chiếm 16,67%. Chọn chủng nấm có hoạt tính mạnh, tiến hành định loại. Kết quả cho thấy đây là chủng nấm *Metarhizium* sp. và được chọn để nghiên cứu tối ưu hóa điều kiện nuôi cấy.

*2.2.2. Ảnh hưởng thời gian nuôi cấy đến quá trình sinh tổng hợp chitinase của nấm sợi*

Thời gian nuôi cấy nấm *Metarhizium* sp. tăng tỉ lệ thuận với hoạt tính chitinase được sinh ra. Sau 24 giờ nuôi hoạt tính chitinase thấp nhất (kích thước vòng phân giải = 0 cm), giá trị này tăng dần và đạt cao nhất tại thời điểm 144 giờ với kích thước vòng phân giải là 4,2cm, hoạt tính chitinase không tăng khi nuôi ở 168 giờ. Kết quả này cao hơn so với nấm

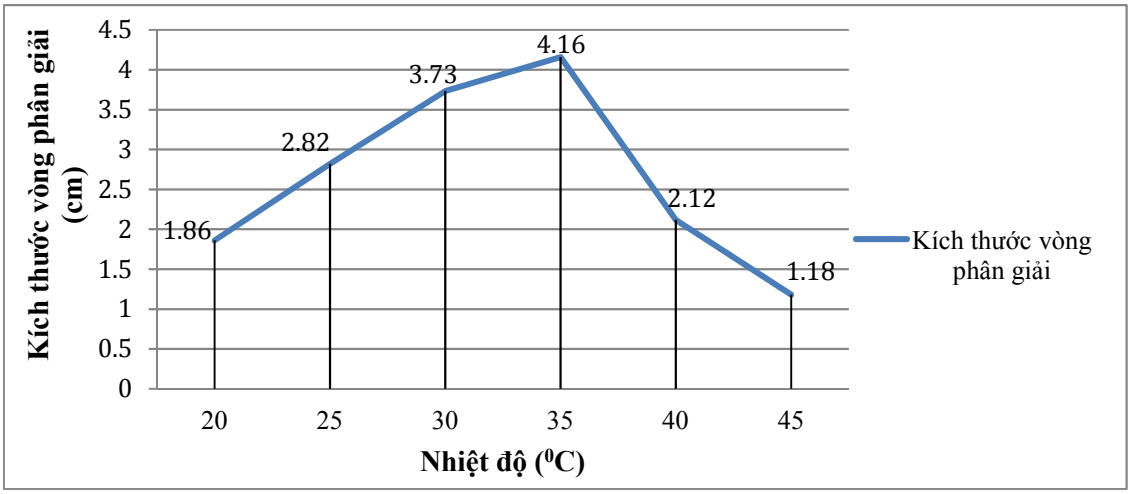
*Aspergillus* cho hoạt tính chitinase cao nhất khi nuôi cấy 36 giờ (Nguyễn Thị Hà - 2012), Lê Thị Huệ - 2010) và 96 giờ (Ghanem, Al-Makishah - 2010).




**Hình 1. Kích thước vòng tròn phân giải của chitinase khảo sát trong 7 ngày**

Mỗi loài có thời gian tăng trưởng tối ưu khác nhau, thường thì hoạt tính enzim mạnh nhất ở thời điểm bào tử mới bắt đầu hình thành (Dẫn theo Nguyễn Thị Hà, 2012). Kết quả nghiên cứu cho thấy, thời gian càng tăng thì hoạt tính của enzyme cũng tăng, tiếp tục kéo dài thời gian nuôi cấy trong điều kiện môi trường không bổ sung thêm chất dinh dưỡng, hoạt tính chitinase giảm do quá trình sinh tổng hợp chitinase không xảy ra.

*2.2.3. Ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường nuôi cấy đến quá trình sinh tổng hợp chitinase*




**Hình 2. Kích thước vòng phân giải khi thử hoạt tính của chitinase nuôi cấy ở các điều kiện nhiệt độ khác nhau**

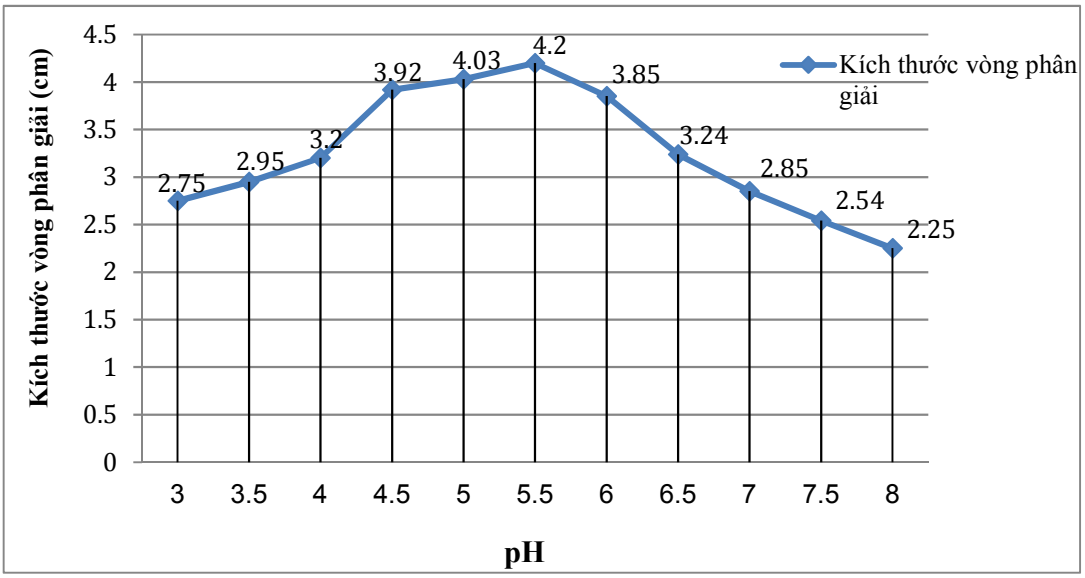
Khi nhiệt độ tăng thì hoạt tính chitinase cũng tăng và đạt giá trị cao nhất tại 35$^0$C với kích thước vòng phân giải 4,16cm. Tuy nhiên, giá trị này bị giảm khi tăng nhiệt độ lên 40$^o$C

và 45$^{o}$C. Kết quả này cũng phù hợp với nghiên cứu trên chủng nấm *Aspergillus* (Lê Thị Huệ, 2010 và Nguyễn Thị Hà, 2012).

Chủng nấm được phân lập tại Thanh Hóa sinh tổng hợp chitinase ở điều kiện nhiệt độ khá cao, tuy nhiên khi nhiệt độ lên cao hơn 35$^{o}$C hoặc thấp hơn 25$^{o}$C thì ảnh hưởng tới khả năng sinh tổng hợp của chủng nấm cho nên hoạt độ enzyme giảm. Mặt khác enzyme có bản chất là protein nên khi ở điều kiện nhiệt độ quá cao hoặc quá thấp cũng ảnh hưởng tới khả năng sinh tổng hợp và hoạt tính của enzyme.

*2.2.4. Ảnh hưởng của pH đến quá trình sinh tổng hợp chitinase*

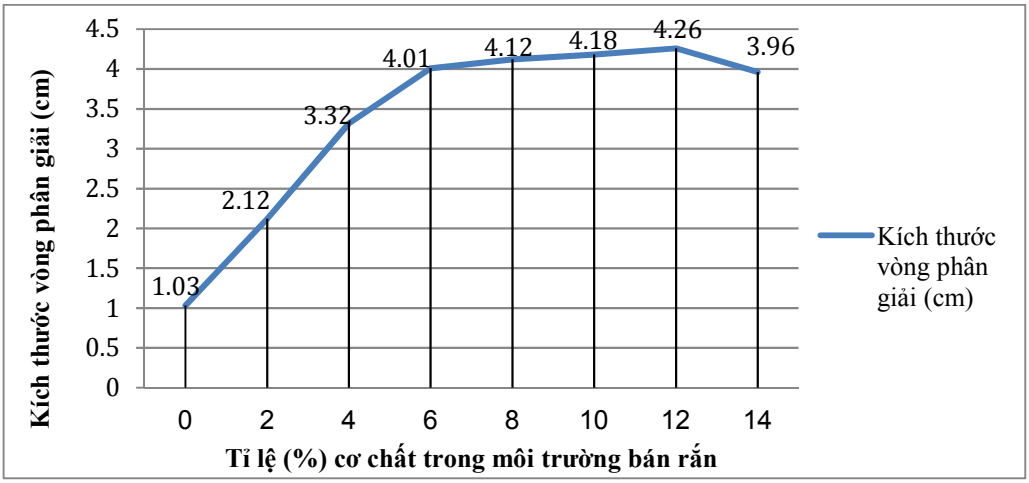
Dùng hệ đệm Britton và Robinson để điều chỉnh pH ở các mức 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8. Sau thời gian nuôi cấy thích hợp (144 giờ), thu dịch chiết enzyme. Lấy 1ml dịch enzym ủ với 1ml dung dịch chitin huyền phù 1% trong 30 phút ở nhiệt độ tối ưu 35$^{0}$C. Chitinase do chủng *Metarhizium* sp. sinh ra có hoạt tính chitinase cao nhất ở pH 5,5 với đường kính vòng phân giải là 4,2cm, hoạt tính chitinase giảm mạnh khi môi trường pH kiềm. Kết quả này tương tự như nghiên cứu trên chủng nấm *Aspergillus* (Nguyễn Thị Hà, 2012).




**Hình 3. Kích thước vòng phân giải khi thử hoạt tính của chitinase ở các mức pH**

*2.2.5. Ảnh hưởng của tỉ lệ (%) cơ chất trong môi trường bán rắn đến quá trình sinh tổng hợp chitinase*

Hoạt tính chitinase thấp nhất khi không có chitin trong môi trường và đạt giá trị cao nhất với kích thước vòng phân giải 4,26cm khi tăng 12% bột vỏ cua vào môi trường nuôi cấy, vượt quá tỉ lệ 12% hoạt độ chitinase có xu hướng giảm. Khi tăng nồng độ chitinase từ 0% - 6% thì kích thước vòng phân giải tăng 2,98cm; trong khi tăng nồng độ từ 6% - 12% thì kích thước vòng phân giải chỉ tăng 0,25cm. Như vậy, khi tăng nồng độ cơ chất vượt quá giới hạn tối ưu thì hoạt tính enzyme gần như không tăng (Lê Nguyễn Đoan Duy và nnk, 2014).




**Hình 4. Kích thước vòng phân giải khi thử hoạt tính của chitinase ở các tỉ lệ (%) cơ chất khác nhau trong môi trường bán rắn**

## 3. KẾT LUẬN

Tuyển chọn được chủng *Metarhizium* sp. có khả năng sinh tổng hợp chitinase cao nhất trong 12 chủng nấm đã được phân lập từ vỏ tôm và xác côn trùng.

Chủng nấm *Metarhizium* sp. được phân lập từ xác côn trùng có khả năng sinh tổng hợp chitinase cao trên môi trường nuôi cấy bán rắn với hàm lượng chitin 12%, thời gian nuôi cấy tối ưu là 144 giờ với pH 5,5, nhiệt độ $35^0$C.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Khưu Phương Yến Anh (2007), *Nghiên cứu khả năng sinh enzyme cellulase của một số chủng nấm sợi phân lập từ rừng ngập mặn Cần Giờ*. Luận văn Thạc sĩ Sinh học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.

[2] Nguyễn Lân Dũng và các tác giả khác (1976), *Một số phương pháp nghiên cứu vi sinh vật học (tập 2, tập 3)*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[3] Lê Nguyễn Đoan Duy và nnk (2014), *Khảo sát quá trình sinh tổng hợp protease từ Aspergillus oryzae trên môi trường bán rắn,* Tạp chí khoa học Trường Đại học Cần Thơ, số 33, tr.104 - 109

[4] Nguyễn Thị Hà (2012), *Tối ưu hóa điều kiện nuôi cấy chủng nấm Aspergillus protuberus sinh tổng hợp enzyme chitinase được phân lập từ rừng ngập mặn Cần Giờ,* Tạp chí khoa học Trường Đại học Cần Thơ :22b, tr.26-35.

[5] Lê Thị Huệ, (2010), *Khảo sát khả năng sinh tổng hợp enzyme chitinase của một số chủng NS thuộc giống Aspergillus, Trichoderma và ứng dụng*, Luận văn Thạc sĩ. Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh.

[6] Phạm Thị Lịch, Trần Thanh Thủy (2013). *Nghiên cứu các điều kiện nuôi cấy để thu nhận chế phẩm enzyme chitinase thô từ chủng nấm Trichoderma sp,* Tạp chí khoa học Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, số 15, tr. 117 - 129.

[7] Lê Ngọc Tú và các tác giả khác (1982), *Enzym vi sinh vật (tập 1, tập 2)*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[8] Trần Thanh Thủy (1998), *Hướng dẫn thực hành vi sinh vật học*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[9] Ghanem, K. M., Al-Garni, S. M., & Al-Makishah, N. H. (2010), *Statistical optimization of cultural conditions for chitinase production from fish scales waste by Aspergillus terreus*, African Journal of Biotechnology, 9(32), 5135-5146.

# A STUDY ON THE AFFECTION OF A NUMBER OF FACTORS TO THE GENETIC CHITINASE OF THE VEGETATION MUSHROOM METARHIZIUM SP. DISTRIBUTED FROM INSECT REMAINS IN THANH HOA

**Trinh Thi Hong**

ABSTRACT

*This research was conducted in order to find active chitinase strains and optimal conditions affecting the biosynthesis of chitinases which is the scientific foundation of producing chitinase preparations applied in practice. Metarhizium sp. contains the highest chitinase activity of 12 strains which are isolated in Thanh Hoa province. Optimal conditions for chitinase biosynthesis were optimized in semi-solid fermentation for 144 hours at 32$^{o}$C, pH 5,5, containing 12% of chitin.*

**Keywords:** *Metarhizium sp., chitinase, chitin.*

# ĐÁNH GIÁ CÁC THÔNG SỐ KỸ THUẬT CỦA MỘT SỐ LOẠI THÉP XÂY DỰNG TRÊN THỊ TRƯỜNG

**Mai Thị Hồng[1], Ngô Sĩ Huy[2]**

TÓM TẮT

*Thép ở Việt Nam được sản xuất trên dây chuyền công nghệ nhập khẩu từ nhiều quốc gia khác nhau. Mỗi quốc gia có một tiêu chuẩn riêng quy định về các thông số kỹ thuật mà thép phải đảm bảo. Hiện nay chưa có nghiên cứu nào đánh giá các thông số kỹ thuật thực tế của các loại thép trên so với các tiêu chuẩn hiện hành của Việt Nam. Bài báo này đánh giá sự phù hợp của một số loại thép trên thị trường so với tiêu chuẩn quốc gia Việt Nam quy định yêu cầu kỹ thuật của thép dùng trong bê tông cốt thép (TCVN 1651-2008). Các loại thép được đánh giá bao gồm CB300 và CB500 của các hãng sản xuất khác nhau như Hòa Phát, Việt Nhật, Thái Nguyên và Việt Ý. Các thông số kỹ thuật được đánh giá bao gồm khối lượng trên một mét chiều dài, giới hạn chảy, giới hạn bền kéo và độ giãn dài sau khi đứt. Kết quả cho thấy, các loại thép được đánh giá đều có các thông số kỹ thuật thỏa mãn TCVN 1651-2008.*

**Từ khóa:** *Thép, giới hạn chảy, giới hạn bền, độ giãn dài.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bê tông cốt thép là vật liệu xây dựng được sử dụng phổ biến và rộng rãi trong các công trình xây dựng hiện nay. Sản phẩm là sự kết hợp giữa khả năng chịu kéo nén tốt của thép và khả năng chịu nén khá, chịu kéo kém của bê tông. Do vậy trong cấu kiện bê tông cốt thép, thép chủ yếu giữ vai trò chịu kéo còn bê tông chịu nén. Giữa cốt thép và bê tông có lực dính tốt, không xảy ra các phản ứng hóa học, có hệ số giãn nở gần giống nhau và bê tông giúp bảo vệ cốt thép khỏi sự xâm thực của môi trường, do vậy chúng có thể kết hợp làm việc cùng nhau [7].

Cốt thép đóng vai trò quan trọng trong việc chịu kéo của cấu kiện bê tông cốt thép. Vì vậy, các thông số kỹ thuật của cốt thép phải được kiểm soát chặt chẽ nhằm đảm bảo chất lượng của công trình. Hiện nay, trên thị trường có nhiều loại thép với các hãng khác nhau, được sản xuất trên các dây chuyền công nghệ nhập khẩu của các quốc gia khác nhau. Ở mỗi quốc gia lại có các tiêu chuẩn khác nhau quy định về các thông số kỹ thuật của cốt thép phải đảm bảo. Ví dụ, ở Việt Nam các thông số kỹ thuật của thép phải thỏa mãn TCVN 1651-2008 [3]. Tương tự như vậy, ở Mỹ và Nhật, thép phải thỏa mãn tiêu chuẩn tương ứng là ASTM 615/A615M-14 [1] và JIS G3112-2010 [6]. Bảng 1, 2 và 3 lần lượt thể hiện các yêu cầu về thông số kỹ thuật của các loại thép theo tiêu chuẩn Việt Nam (TCVN 1651-2008), với các loại thép tương ứng theo tiêu chuẩn Mỹ (ASTM 615/A615M-14) và Nhật (JIS G3112-2010).

[1,2] *Giảng viên khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức*

**Bảng 1. Tiêu chuẩn quốc gia Việt Nam TCVN 1651-2008**

| Mác thép | Giới hạn chảy (MPa) | Giới hạn bền (MPa) | Độ giãn dài sau khi đứt (%) |
|---|---|---|---|
| CB300-T | 300 | 440 | 16 |
| CB300-V | 300 | 450 | 19 |
| CB400-V | 400 | 570 | 14 |
| CB500-V | 500 | 650 | 14 |

**Bảng 2. Tiêu chuẩn Mỹ ASTM 615/A615M-14**

| Mác thép | Giới hạn chảy (MPa) | Giới hạn bền (MPa) | Độ giãn dài sau khi đứt (%) |
|---|---|---|---|
| G 280 | 280 | 420 | 11 (D ≤ 10)<br>12 (D > 10) |
| G 420 | 420 | 620 | 9 (D ≤ 20)<br>8 (20 < D ≤ 25)<br>7 (D ≥ 28) |
| G 520 | 520 | 690 | 7 (D ≤ 25)<br>6 (D > 25) |

*(Ghi chú: D là đường kính thép)*

**Bảng 3. Tiêu chuẩn Nhật JIS G3112-2010**

| Mác thép | Giới hạn chảy (MPa) | Giới hạn bền (MPa) | Độ giãn dài sau khi đứt (%) |
|---|---|---|---|
| SD 295A | 295 | 440-600 | 16 (D < 25)<br>17 (D ≥ 25) |
| SD 390 | 390-510 | 560 | 16 (D < 25)<br>17 (D ≥ 25) |
| SD 490 | 490-625 | 620 | 12 (D < 25)<br>13 (D ≥ 25) |

Mục tiêu của bài báo là đánh giá sự phù hợp của một số loại thép xây dựng trên thị trường của các hãng sản xuất khác nhau so với tiêu chuẩn hiện hành của Việt Nam TCVN 1651-2008 [3]. Các thông số kỹ thuật được đánh giá bao gồm: khối lượng trên một mét chiều dài, giới hạn chảy, giới hạn bền kéo và độ giãn dài sau khi đứt. Chú ý rằng, các tiêu chuẩn của Mỹ ASTM 615/A615M-14 [1] và của Nhật JIS G3112-2010 [6] không quy định về độ lệch khối lượng trên một mét chiều dài. Các loại thép được đánh giá bao gồm thép Hòa Phát, Việt Nhật, Thái Nguyên và Việt Ý.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Chuẩn bị thí nghiệm

*2.1.1. Vật liệu*

Bảng 4 thống kê các loại thép được sử dụng trong nghiên cứu này bao gồm: thép CB300 của Hòa Phát, Việt Nhật và Thái Nguyên với các loại đường kính từ D6 đến D25. Đây là các loại thép được sử dụng phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng tại Thanh Hóa. Loại thép CB500 của hãng Việt Ý với các loại đường kính từ D16 đến D32 cũng được xem xét trong nghiên cứu này, đây là loại thép thường sử dụng trong các công trình,

dự án quan trọng, yêu cầu kết cấu có khả năng chịu lực lớn. Chú ý rằng các loại thép có đường kính bằng hoặc nhỏ hơn 10mm là thép trơn, trong khi các thép khác có đường kính lớn hơn 10mm là thép vằn.

**Bảng 4. Các loại thép thí nghiệm**

| STT | Tên hãng | Kí hiệu | Loại thép | Các loại đường kính |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Hòa Phát | HP | CB300 | D6 ÷ D25 |
| 2 | Việt Nhật | VN | CB300 | D6 ÷ D25 |
| 3 | Thái Nguyên | TN | CB300 | D6 ÷ D25 |
| 4 | Việt Ý | VY | CB500 | D16 ÷ D32 |

*2.1.2. Phương pháp thí nghiệm*

Các mẫu thép được chuẩn bị có chiều dài 60cm như hình 1. Các thông số thí nghiệm bao gồm: khối lượng trên 1m chiều dài, giới hạn chảy, giới hạn bền kéo, độ giãn dài khi đứt. Phương pháp thí nghiệm theo tiêu chuẩn Việt Nam TCVN 7937-2013 [5]. Chú ý rằng phương pháp thí nghiệm theo TCVN 7937-2013 cũng tương tự với các tiêu chuẩn thí nghiệm của Mỹ ASTM A370-2015 [2] và của Nhật JIS Z2241-1993 [5]. Các thí nghiệm đánh giá khả năng chịu lực được tiến hành với máy kéo nén vạn năng 1000 kN CHT 4016 tại xưởng thực hành Khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức (hình 2). Mỗi loại thép sử dụng ba mẫu thí nghiệm, giá trị mỗi loại lấy trung bình của ba mẫu thử.

**Hình 1. Chuẩn bị mẫu thí nghiệm**

**Hình 2. Máy kéo nén vạn năng 1000 kN CHT 4016**

## 2.2. Kết quả và thảo luận

### *2.2.1. Khối lượng 1m chiều dài*

Khối lượng 1m chiều dài của các loại thép CB300 và CB500 được thể hiện lần lượt trong bảng 5 và 6. Kết quả thí nghiệm cho thấy, cả ba loại thép CB300 có độ sai lệch về khối lượng thỏa mãn theo TCVN 1651-2008 [3], độ sai lệch trung bình dao động trong khoảng 2,17% đến 3,36%. Trong đó thép Thái Nguyên có sự đồng đều hơn với độ sai lệch trung bình và độ lệch chuẩn nhỏ nhất (2,17% ± 1,36%). Tương tự, độ sai lệch về khối lượng của thép Việt Ý CB500 cũng thỏa mãn theo TCVN 1651-2008 [3], độ sai lệch trung bình và độ lệch chuẩn lần lượt là 3,21% và 0,88%. Kết quả cũng cho thấy sự sai lệch giữa các loại thép là không nhiều.

**Bảng 5. Khối lượng 1m chiều dài của các loại thép CB300**

| STT | Đường kính (mm) | Khối lượng 1m chiều dài theo quy định (kg/m) | Khối lượng thực 1m chiều dài (kg/m) | | | Sai lệch (%) | | | Sai lệch cho phép (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | HP | VN | TN | HP | VN | TN | |
| 1 | 6 | 0,222 | 0,224 | 0,220 | 0,221 | 0,7 | 0,8 | 0.43 | ±8 |
| 2 | 8 | 0,395 | 0,390 | 0,404 | 0,403 | 1,1 | 2,4 | 2.04 | ±8 |
| 3 | 10 | 0,617 | 0,582 | 0,591 | 0,609 | 5,7 | 4,1 | 1.24 | ±6 |
| 4 | 12 | 0,888 | 0,839 | 0,841 | 0,883 | 5,4 | 5,3 | 0.54 | ±6 |
| 5 | 14 | 1,208 | 1,196 | 1,183 | 1,160 | 1,0 | 2,1 | 4.01 | ±5 |
| 6 | 16 | 1,578 | 1,536 | 1,571 | 1,569 | 2,7 | 0,4 | 0.59 | ±5 |
| 7 | 18 | 1,998 | 2,007 | 1,910 | 1,909 | 0,5 | 4,4 | 4.42 | ±5 |
| 8 | 20 | 2,466 | 2,456 | 2,371 | 2,439 | 0,4 | 3,9 | 1.12 | ±5 |
| 9 | 22 | 2,984 | 2,855 | 2,858 | 2,890 | 4,3 | 4,2 | 3.15 | ±5 |
| 10 | 25 | 3,853 | 3,723 | 3,720 | 3,758 | 3,4 | 3,5 | 2.46 | ±4 |
| Giá trị trung bình | | | | | | 2,52 | 3,36 | 2,17 | |
| Độ lệch chuẩn | | | | | | 1,97 | 1,39 | 1,36 | |

**Bảng 6. Khối lượng 1m chiều dài của thép Việt Ý CB500**

| STT | Đường kính (mm) | Khối lượng 1m chiều dài theo quy định (kg/m) | Khối lượng thực 1m chiều dài (kg/m) | Sai lệch (%) | Sai lệch cho phép (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 1,578 | 1,522 | 3.55 | ±5 |
| 2 | 18 | 1,998 | 1,917 | 3.55 | ±5 |
| 3 | 20 | 2,466 | 2,367 | 4.06 | ±5 |
| 4 | 22 | 2,984 | 2,865 | 4.03 | ±5 |
| 5 | 25 | 3,853 | 3,748 | 4.00 | ±4 |
| 6 | 28 | 4,834 | 4,755 | 2.74 | ±4 |
| 7 | 32 | 6,313 | 6,182 | 1.63 | ±4 |
| Giá trị trung bình | | | | 3,21 | |
| Độ lệch chuẩn | | | | 0,88 | |

*2.2.2. Giới hạn chảy dẻo*

Bảng 7 và 8 là kết quả thí nghiệm giới hạn chảy dẻo của các loại thép CB300 và CB500. Đối với thép CB300, tỷ số giữa giới hạn chảy dẻo từ thí nghiệm và giá trị chảy dẻo theo yêu cầu của TCVN 1651-2008 (300 MPa) [3] nằm trong khoảng từ 1,18 đến 2,57. Có nghĩa là giới hạn chảy dẻo thực tế lớn hơn 18% - 157% so với giá trị quy định, giá trị trung bình lớn hơn 45% - 60%. Thép Hòa Phát có giới hạn chảy dẻo trung bình cao hơn hai loại còn lại, tuy nhiên thép Việt Nhật lại có sự đồng đều hơn. Đối với thép CB500 giới hạn chảy dẻo lớn hơn 4% - 31% so với giá trị chảy dẻo theo quy định (500 MPa), trung bình lớn hơn 21%, độ lệch chuẩn là 8%. Kết quả này cho thấy cường độ chảy dẻo thực tế của các loại thép CB300 lớn hơn rất nhiều so với giá trị danh nghĩa quy định trong TCVN 1651-2008 [3]. Đối với thép CB500, cường độ thực tế lớn hơn cường độ danh nghĩa không nhiều bởi vì CB500 là thép có cường độ cao, được sử dụng trong các dự án quan trọng, nên chất lượng từng thanh thép được kiểm soát chặt chẽ và chất lượng các thanh thép tương đối đồng đều.

**Bảng 7. Giới hạn chảy dẻo của các loại thép CB300**

| STT | Đường kính (mm) | Giới hạn chảy dẻo theo quy định $R_{oH}$ (MPa) | Giới hạn chảy dẻo thí nghiệm $R_H$ (MPa) | | | Tỷ số $\frac{R_{oH}}{R_H}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | HP | VN | TN | HP | VN | TN |
| 1 | 6 | 300 | 772 | 713 | 639 | 2,57 | 2,38 | 2,13 |
| 2 | 8 | 300 | 563 | 544 | 546 | 1,88 | 1,81 | 1,82 |
| 3 | 10 | 300 | 594 | 504 | 644 | 1,98 | 1,68 | 2,15 |
| 4 | 12 | 300 | 430 | 467 | 463 | 1,43 | 1,56 | 1,54 |
| 5 | 14 | 300 | 361 | 378 | 452 | 1,20 | 1,26 | 1,51 |
| 6 | 16 | 300 | 378 | 359 | 483 | 1,26 | 1,20 | 1,61 |
| 7 | 18 | 300 | 430 | 411 | 353 | 1,43 | 1,37 | 1,18 |
| 8 | 20 | 300 | 358 | 364 | 354 | 1,19 | 1,21 | 1,18 |
| 9 | 22 | 300 | 385 | 412 | 487 | 1,28 | 1,37 | 1,62 |
| 10 | 25 | 300 | 518 | 464 | 509 | 1,73 | 1,55 | 1,70 |
| Giá trị trung bình | | | | | | 1,60 | 1,45 | 1,48 |
| Độ lệch chuẩn | | | | | | 0,42 | 0,20 | 0,30 |

**Bảng 8. Giới hạn chảy dẻo của thép Việt Ý CB500**

| STT | Đường kính (mm) | Giới hạn chảy dẻo theo quy định $R_{oH}$ (MPa) | Giới hạn chảy dẻo thí nghiệm $R_H$ (MPa) | Tỷ số $\frac{R_{oH}}{R_H}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 500 | 618 | 1,24 |
| 2 | 18 | 500 | 651 | 1,30 |
| 3 | 20 | 500 | 656 | 1,31 |
| 4 | 22 | 500 | 589 | 1,18 |
| 5 | 25 | 500 | 597 | 1,19 |
| 6 | 28 | 500 | 578 | 1,16 |
| 7 | 32 | 500 | 520 | 1,04 |
| Giá trị trung bình | | | | 1,21 |
| Độ lệch chuẩn | | | | 0,08 |

*2.2.3. Giới hạn bền kéo*

Tương tự như giới hạn chảy dẻo, giới hạn bền kéo thực tế lớn hơn 11%-107% so với giá trị danh nghĩa theo quy định đối với thép CB300 và 7%-20% đối với thép CB500 (xem Bảng 9 và 10). Trung bình, giới hạn bền kéo của thép CB300 lớn hơn 41%-46%, của thép CB500 lớn hơn 15% so với các giá trị yêu cầu theo TCVN 1651-2008 [3]. Giới hạn bền kéo của thép CB500 đồng đều hơn so với thép CB300. Cả ba loại thép CB300 được nghiên cứu trong bài báo này có giới hạn bền kéo tương đương nhau, độ sai khác không nhiều.

**Bảng 9. Giới hạn bền kéo của các loại thép CB300**

| STT | Đường kính (mm) | Giới hạn chảy dẻo theo quy định $R_{om}$ (MPa) | Giới hạn chảy dẻo thí nghiệm $R_m$ (MPa) | | | Tỷ số $\frac{R_{om}}{R_m}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | HP | VN | TN | HP | VN | TN |
| 1 | 6 | 440 | 913 | 855 | 781 | 2,07 | 1,94 | 1,78 |
| 2 | 8 | 440 | 724 | 738 | 702 | 1,64 | 1,68 | 1,59 |
| 3 | 10 | 440 | 701 | 637 | 722 | 1,59 | 1,45 | 1,64 |
| 4 | 12 | 450 | 579 | 672 | 603 | 1,29 | 1,49 | 1,34 |
| 5 | 14 | 450 | 554 | 570 | 643 | 1,23 | 1,27 | 1,43 |
| 6 | 16 | 450 | 552 | 499 | 649 | 1,23 | 1,11 | 1,44 |
| 7 | 18 | 450 | 633 | 575 | 534 | 1,41 | 1,28 | 1,19 |
| 8 | 20 | 450 | 543 | 530 | 566 | 1,21 | 1,18 | 1,26 |
| 9 | 22 | 450 | 550 | 604 | 682 | 1,22 | 1,34 | 1,52 |
| 10 | 25 | 450 | 653 | 633 | 651 | 1,45 | 1,41 | 1,45 |
| Giá trị trung bình | | | | | | 1,43 | 1,41 | 1,46 |
| Độ lệch chuẩn | | | | | | 0,26 | 0,17 | 0,14 |

**Bảng 10. Giới hạn bền kéo của thép Việt Ý CB500**

| STT | Đường kính (mm) | Giới hạn chảy dẻo theo quy định $R_{om}$ (MPa) | Giới hạn chảy dẻo thí nghiệm $R_m$ (MPa) | Tỷ số $\frac{R_{om}}{R_m}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 650 | 773 | 1,19 |
| 2 | 18 | 650 | 757 | 1,17 |
| 3 | 20 | 650 | 782 | 1,20 |
| 4 | 22 | 650 | 712 | 1,10 |
| 5 | 25 | 650 | 754 | 1,16 |
| 6 | 28 | 650 | 726 | 1,12 |
| 7 | 32 | 650 | 698 | 1,07 |
| Giá trị trung bình | | | | 1,15 |
| Độ lệch chuẩn | | | | 0,04 |

*2.2.4. Độ giãn dài khi đứt*

Bảng 11 và 12 so sánh độ giãn dài thực tế khi đứt của các loại thép CB300 và CB500 so với các giá trị quy định theo TCVN 1651-2008 [3]. Kết quả cho thấy độ giãn dài khi đứt

của tất cả các loại thép đều lớn hơn các giá trị theo quy định của tiêu chuẩn từ 1%-44%. Độ giãn dài khi đứt của các loại thép CB300 tương đối đều nhau, tuy nhiên thép CB500 vẫn cho giá trị đồng đều nhất.

**Bảng 11. Độ giãn dài khi đứt của các loại thép CB300**

| STT | Đường kính (mm) | Độ giãn dài khi đứt theo quy định $A_{os}$ (%) | Độ giãn dài khi đứt thí nghiệm $A_s$ (%) | | | Tỷ số $\frac{A_{os}}{A_s}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | HP | VN | TN | HP | VN | TN |
| 1 | 6 | 16 | 20,8 | 19,5 | 23,1 | 1,30 | 1,22 | 1,44 |
| 2 | 8 | 16 | 19,8 | 19,8 | 20,8 | 1,23 | 1,24 | 1,30 |
| 3 | 10 | 16 | 19,8 | 18,9 | 20,8 | 1,24 | 1,18 | 1,30 |
| 4 | 12 | 19 | 20,8 | 19,2 | 19,4 | 1,09 | 1,01 | 1,02 |
| 5 | 14 | 19 | 19,5 | 19,5 | 20,1 | 1,03 | 1,03 | 1,06 |
| 6 | 16 | 19 | 19,3 | 19,2 | 19,7 | 1,02 | 1,01 | 1,04 |
| 7 | 18 | 19 | 21,2 | 19,1 | 21,0 | 1,12 | 1,01 | 1,10 |
| 8 | 20 | 19 | 19,1 | 20,8 | 19,6 | 1,01 | 1,09 | 1,03 |
| 9 | 22 | 19 | 20,2 | 216 | 19,7 | 1,06 | 1,14 | 1,04 |
| 10 | 25 | 19 | 20,3 | 21,6 | 21,6 | 1,07 | 1,14 | 1,14 |
| Giá trị trung bình | | | | | | 1,12 | 1,11 | 1,15 |
| Độ lệch chuẩn | | | | | | 0,10 | 0,08 | 0,11 |

**Bảng 12. Độ giãn dài khi đứt của thép Việt Ý CB500**

| STT | Đường kính (mm) | Độ giãn dài khi đứt theo quy định $A_{os}$ (%) | Độ giãn dài khi đứt thí nghiệm $A_s$ (%) | Tỷ số $\frac{A_{os}}{A_s}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 14 | 14,8 | 1,06 |
| 2 | 18 | 14 | 14,9 | 1,06 |
| 3 | 20 | 14 | 14,7 | 1,05 |
| 4 | 22 | 14 | 14,7 | 1,05 |
| 5 | 25 | 14 | 14,9 | 1,06 |
| 6 | 28 | 14 | 14,7 | 1,05 |
| 7 | 32 | 14 | 14,8 | 1,06 |
| Giá trị trung bình | | | | 1,05 |
| Độ lệch chuẩn | | | | 0,01 |

## 3. KẾT LUẬN

Kết quả đánh giá một số loại thép CB300 và CB500 trên thị trường của các hãng Hòa Phát, Việt Nhật, Thái Nguyên và Việt Ý cho thấy, tất cả các loại thép được đánh giá trong bài báo này đều có các thông số kỹ thuật như khối lượng trên một mét chiều dài, giới hạn chảy, giới hạn bền kéo và độ giãn dài sau khi đứt thỏa mãn tiêu chuẩn hiện hành của Việt Nam (TCVN 1651-2008). Kết quả thí nghiệm còn cho thấy thép CB500 có chất lượng đồng đều hơn thép CB300, và chất lượng của các loại thép CB300 cũng tương đối đều nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] ASTM 615/A615M (2014), *Standard Specification for Deformed and Plain Carbon-Steel Bars for Concrete Reinforcement*.

[2] ASTM A370 (2015), *Standard Test Methods and Definitions for Mechanical Testing of Steel Products.*

[3] Bộ Khoa học và Công nghệ (2008), *Tiêu chuẩn quốc gia TCVN 1651-2008 - Thép cốt bê tông.*

[4] Bộ Khoa học và Công nghệ (2013), *Tiêu chuẩn quốc gia TCVN 7937-2013 - Thép làm cốt bê tông và bê tông dự ứng lực - phương pháp thử.*

[5] JIS Z2241 (1993), *Method of tensile test for metallic materials.*

[6] JIS G3212 (2010), *Steel bars for concrete reinforcement.*

[7] Trần Mạnh Tuân, Nguyễn Hữu Thành, Nguyễn Hữu Lân, Nguyễn Hoàng Hà (2010), *Kết cấu bê tông cốt thép*, Nxb. Xây Dựng, Hà Nội.

# EVALUATION OF THE SPECIFICATIONS OF REINFORCING STEELS ON THE MARKET

**Mai Thi Hong, Ngo Si Huy**

ABSTRACT

*In Vietnam, steel is produced by technologies imported from abroad. Each country has its own standard specifications for requirement of steel properties. Currently, there is no study to assess the actual engineering properties of such steels compared with the current standards of Vietnam. This paper evaluates the properties of steel on the market compared with requirements by National Vietnam Standard for steel used in reinforced concrete (TCVN 1651-2008). Steels are evaluated including CB300 and CB500 made by Hoa Phat, Viet Nhat, Thai Nguyen and Viet Y. The specifications of steel including mass of unit length, yield strength, tensile strength and elongation are investigated. Test results show that all steels examined herein satisfy the requirement of TCVN 1651-2008.*

**Keywords:** *Steel, yield strength, tensile strength, elongation.*

# MỘT SỐ TÍNH CHẤT MỞ RỘNG CỦA CĂN IĐÊAN

**Lê Quang Huy[1], Hoàng Thị Minh Nhàn[2]**

TÓM TẮT

*Bài báo mở rộng một số tính chất của các phép toán: tổng, tích và giao qua phép lấy căn.*

**Từ khóa:** *Vành, iđêan, căn của iđêan.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong bài báo này, ta luôn giả thiết ($R$, +, .) là vành giao hoán, có đơn vị và I là một iđêan của $R$.

**Bổ đề và định nghĩa 1.1.** Cho $I$ là một iđêan của vành $R$. Kí hiệu: $\sqrt{I} = \{ x \in R \mid \exists n \in \boldsymbol{N}: x^n \in I \}$. Khi đó $\sqrt{I}$ là một iđêan của $R$ và iđêan này gọi là *căn* của iđêan $I$.

*Chứng minh.*

i) Ta có $0 \in \sqrt{I}$ nên $\sqrt{I} \neq \emptyset$.

ii) Lấy $a, b \in \sqrt{I}$, tồn tại $n_1, n_2$ sao cho $a^{n_1} \in I$ và $b^{n_2} \in I$. Chọn $n = n_1 + n_2 - 1$, ta có $(a-b)^{n_1+n_2+1} \in I$, suy ra $a - b \in \sqrt{I}$.

iii) Với mọi $a \in \sqrt{I}$ và $x \in R$. Do $a \in \sqrt{I}$ nên tồn tại n sao cho $a^n \in I$. Suy ra $(ax)^n = a^n x^n \in I$ (vì $a^n \in I$), nghĩa là $ax \in \sqrt{I}$.

Vậy $\sqrt{I}$ là một iđêan của vành $R$.

Iđêan $\sqrt{I}$ là một iđêan được xây dựng từ iđêan $I$, khái niệm và một số tính chất của nó được trình bày trong [1], [2], [3] và [4]. Căn của iđêan có nhiều ứng dụng trong đại số giao hoán, do đó vấn đề tự nhiên được nhiều người quan tâm là mối quan hệ giữa $I$ và $\sqrt{I}$ ra sao và phép lấy căn có thể bảo toàn qua những phép toán nào? Trong [2] và [4] đã giới thiệu và đưa một số tính chất của iđêan căn về các vấn đề này, tuy nhiên chưa hệ thống và chưa đầy đủ. Trong bài báo này chúng tôi sẽ trình bày một cách chi tiết khái niệm và tính chất về mối quan hệ giữa $I$ và $\sqrt{I}$ và mở rộng phép lấy căn qua phép tính tổng, tích và giao của một họ các iđêan cho trước.

## 2. QUAN HỆ GIỮA $I$ VÀ $\sqrt{I}$

**Bổ đề 2.1.** Cho $J$ là iđêan của R sao cho $J \subseteq I$. Khi đó $J \subseteq \sqrt{I}$.

*Chứng minh.*

Với mọi $a \in J$, ta lấy $n = 1$, khi đó $a^n \in J \subseteq I$. Suy ra $a \in \sqrt{I}$. Do vậy $I \in \sqrt{I}$.

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

[2] *Sinh viên Đại học Sư phạm Toán K17A, khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

**Hệ quả 2.2.** $I \subseteq \sqrt{I}$ .

Khi nào đẳng thức $\sqrt{I} = I$ đúng? Sau đây, chúng tôi chỉ ra một số iđêan đặc biệt để đẳng thức $\sqrt{I} = I$ đúng.

**Mệnh đề 2.3.** $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

*Chứng minh.*

Áp dụng Hệ quả 2.2 ta có $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$, do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$. Với mọi $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$ thì tồn tại $n_1$ sao cho $x^{n_1} \in \sqrt{I}$. Suy ra tồn tại $n_2$ sao cho $(x^{n_1})^{n_2} \in I$. Do đó $x^{n_1 n_2} \in I$. Từ đó ta nhận được $x \in \sqrt{I}$, hay $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$ .Vậy $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Đẳng thức cũng đúng nếu $I$ là iđêan nguyên tố.

**Bổ đề 2.4.** Nếu P là iđêan nguyên tố thì $\sqrt{P} = P$.

*Chứng minh.*

Theo Hệ quả 2.2. ta có $P \subseteq \sqrt{P}$ , do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{P} \subseteq P$. Với mọi $x \in \sqrt{P}$ . Nếu $n = 1$. Ta có $x = x^1 \in P$. *Suy ra* $\sqrt{P} \subseteq P$.Nếu $n \geq 2$. Giả sử $x \notin P$. Ta có $x^n = x.x^{n-1} \in P$. Vì P là iđêan nguyên tố nên $x^{n-1} \in P$. Cứ tiếp tục quá trình như vậy ta sẽ nhận được $x \in P$. Điều này mâu thuẫn với giả sử $x \notin P$. Vậy $x \in P$. Suy ra $\sqrt{P} \subseteq P$. Từ đó ta nhận được $\sqrt{P} = P$.

Xét trên vành số nguyên $\boldsymbol{Z}$, ta biết rằng với mỗi số nguyên tố $p$, iđêan $p\mathbf{Z}$ là iđêan nguyên tố, do vậy ta có kết quả sau:

**Hệ quả 2.5.** $\sqrt{q\boldsymbol{Z}} = q\boldsymbol{Z}$.

Kết quả của Hệ quả 2.4 vẫn còn đúng khi thay $q$ bằng lũy thừa của $q$. Cụ thể ta có mệnh đề sau:

**Mệnh đề 2.6.** Cho $q$ là số nguyên tố. Khi đó với mọi số tự nhiên $\alpha \geq 1$ ta có $\sqrt{\mathrm{q}^{\alpha}\mathbf{Z}} = \mathrm{q}\mathbf{Z}$.

*Chứng minh.*

Lấy $x \in \sqrt{q^{\alpha}\boldsymbol{Z}}$ thì tồn tại $n \in N$ sao cho $x^n \in q^{\alpha}\boldsymbol{Z}$. Khi đó tồn tại $p \in Z$ sao cho $x^n = q^a.p$ . Suy ra $x^n \vdots p^{\alpha}$ . Vì q là số nguyên tố nên $x \vdots q$ hay $x \in q\boldsymbol{Z}$. Vậy $\sqrt{\mathrm{q}^{\alpha}\mathbf{Z}} \subseteq \mathrm{q}\mathbf{Z}$.

Lấy $x \in \mathrm{q}\mathbf{Z}$, khi đó tồn tại $m \in Z$ sao cho $x = qm$. Chọn $n = \alpha$ ta có $x^n = (qm)^{\alpha} = q^{\alpha}.m^{\alpha} \in q^{\alpha}$ Z. Vậy $q\boldsymbol{Z} \subseteq \sqrt{q^{\alpha}\boldsymbol{Z}}$ .

Nên ta có $\sqrt{q^{\alpha}\boldsymbol{Z}} = q\boldsymbol{Z}$.

## 3. SỰ BẢO TOÀN CĂN CỦA IĐÊAN QUA MỘT SỐ PHÉP TOÁN

Trong mục này, chúng tôi chỉ ra iđêan căn bảo toàn qua phép thương, phép nhân, phép giao và phép tổng của các iđêan.

**Bổ đề 3.1.** Giả sử $I$ và $J$ là các iđêan của R. Khi đó $\sqrt{I/J} = \sqrt{I}/J$ .

*Chứng minh.*

Lấy $x \in \sqrt{I/J}$ bất kỳ. Khi đó, tồn tại n $\in N$ sao cho $x^n \in I/J$. Theo giả thiết ta có $x \in \frac{R}{J}$ nên $x = a + J,\ a \in I.$ Do đó $x^n = a^n + J \in I/J.$ Suy ra $a^n \in \sqrt{I}$. Nghĩa là $\sqrt{I/J} \subseteq \sqrt{I}/J$.

Lấy $x \in \sqrt{I}/J$ bất kỳ. Ta có $x = a + J,\ a \in \sqrt{I}.$ Khi đó, tồn tại $n \in N$ sao cho $a^n \in I$. Do đó $x^n = a^n + J \in I/J$. Suy ra $x \in \sqrt{I/J}$. Nghĩa là $\sqrt{I/J} \supseteq \sqrt{I}/J$. Vậy $\sqrt{I/J} = \sqrt{I}/J$.

**Bổ đề 3.2.** Giả sử $J \subseteq I$. Khi đó $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

*Chứng minh.*

Lấy $x \in \sqrt{J}$ bất kỳ. Khi đó, tồn tại $n \in N$ sao cho $x^n \in J$. Mà theo giả thiết ta có $J \subseteq I$ nên $x^n \in I.$ Suy ra $x \in \sqrt{I}$ .Vậy $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}.$

Từ bổ đề trên ta thấy trong trường hợp $J \subseteq I$ luôn tồn tại iđêan $\sqrt{I}/\sqrt{J}$. Theo Bổ đề 3.1 và kết hợp với Hệ quả 2.5 ta có hệ quả sau:

**Hệ quả 3.3.** Giả sử $P$ là i đêan nguyên tố sao cho $P \subseteq I$. Khi đó ta có $\sqrt{I/P} \cong \sqrt{I}/\sqrt{P}$

Còn trong trường hợp tổng quát tồn tại một toàn cấu từ $\sqrt{I/J}$ vào $\sqrt{I}/\sqrt{J}$.

**Mệnh đề 3.4.** Giả sử $J \subseteq I$. Khi đó tồn tại một dãy khớp ngắn

$0 \to \sqrt{J}/J \to \sqrt{I/J} \to \sqrt{I}/\sqrt{J} \to 0.$

*Chứng minh.*

Theo Bổ đề 3.1, ta có $\sqrt{I/J} = \sqrt{I}/J$. Xét toàn cấu tự nhiên $g : \sqrt{I}/J \to \sqrt{I}/\sqrt{J}$. Khi đó ta có điều phải chứng minh.

**Mệnh đề 3.5.**

a) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$

b) $\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_n} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_n}}$ $(n \geq 1).$

*Chứng minh.*

*Theo Hệ quả 2.3, ta có* $I \subseteq \sqrt{I}$ *và* $J \subseteq \sqrt{J}$. *Suy ra* $I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$. *Theo Bổ đề 3.2, ta nhận được* $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$

Lấy $x \in \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$, khi đó tồn tại n sao cho $x^n \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$. Suy ra tồn tại $x_1 \in \sqrt{I}, x_2 \in \sqrt{J}$ để cho $x^n = x_1 + x_2$. Vì $x_1 \in \sqrt{I}$, nên tồn tại $n_1$ sao cho $x_1^{n_1} \in I$ và $x_2 \in \sqrt{J}$, nên tồn tại $n_2$ sao cho $x_2^{n_2} \in J$. Ta cần tìm t thỏa mãn $x^t \in I + J$.

Xét khai triển

$$(x_1 + x_2)^{n_1+n_2-1} = \sum_{i=0}^{n_1+n_2+i} C^i_{n_1+n_2-1}\, {x_1}^i {x_2}^{n_1+n_2+i-1}.$$

Trường hợp: $i \geq n_1$. Ta có $x_1^i \in I. \Rightarrow x_1^i {x_2}^{n_1+n_2+i-1} \in I$.

Trường hợp: $i < n_1$. Ta có $i \leq n_1 - 1. \Rightarrow n_1 + n_2 + i - 1 \geq n_1 + n_2 - (n_1 - 1) - 1 = n_2 {x_2}^{n_1+n_2+i-1} \in J$.

$\Rightarrow x_1^i {x_2}^{n_1+n_2+i-1} \in J$. Do vậy ta nhận được $(x_1 + x_2)^{n_1+n_2-1} \in I + J$. Suy ra

$$(x^n)^{n_1+n_2-1} = x^{n(n_1+n_2-1)} \in I + J.$$

Chọn $t = n(n_1 + n_2 - 1)$, ta nhận được $x \in \sqrt{I+J}$. Ta có điều phải chứng minh.

*Chứng minh quy nạp theo n*

Với *n* = 1, đẳng thức trở thành $\sqrt{\sqrt{I_1}} = \sqrt{I_1}$ (đúng theo Mệnh đề 2.3); với *n* = 2, đẳng thức trở thành $\sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}} = \sqrt{I_1 + I_2}$ (đúng theo Mệnh đề 3.5 a).

Giả sử đẳng thức đúng với *n* = *k* $(k \geq 2)$, ta có

$$\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_k} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_k}}\ .$$

Ta chứng minh đẳng thức cũng đúng với *n*=*k*+*1* $(k \geq 2)$, nghĩa là chứng minh

$$\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_{k+1}} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_{k+1}}}\ .$$

Thật vậy, ta có

$$\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_{k-1} + (I_k + I_{k+1})} = \sqrt{\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_{k-1}} + \sqrt{(I_k + I_{k+1})}}$$
$$= \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_{k-1}} + \sqrt{I_k} + \sqrt{I_{k+1}}}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Mệnh đề 3.6.** *a*) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

b) $\sqrt{I_1 . I_2 \ldots I_n} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}$.

*Chứng minh.*

a) Lấy $x \in \sqrt{I \cap J}$ tùy ý. Khi đó tồn tại $n$ sao cho $x^n \in I \cap J$. Suy ra $\begin{cases} x^n \in I \\ x^n \in J \end{cases}$. Do đó $(x^n)^2 \in IJ$, hay $x^{2n} \in IJ$. $\Rightarrow x \in \sqrt{IJ}$. Do vậy $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{IJ}$.

Ta có $IJ \subseteq I$ và $IJ \subseteq J$, nên $IJ \subseteq I \cap J$. Theo Bổ đề 3.2, ta có $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J}$.

Vậy ta nhận được $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$.

Lấy $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ tùy ý. $\Rightarrow \begin{cases} x \in \sqrt{I} \\ x \in \sqrt{J} \end{cases}$. Khi đó tồn tại $n_1$ sao cho $x^{n_1} \in I$ và tồn tại $n_2$ sao cho $x^{n_2} \in J \Rightarrow x^{n_1} . x^{n_2} \in I$ và $x^{n_1} . x^{n_2} \in J$ (Do *I, J* là các iđêan). $\Rightarrow x^{n_1+n_2} \in I \cap J$. Do vậy $x \in \sqrt{I \cap J}$. Từ đó ta nhận được: $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I \cap J}$.

Do $I \cap J \subseteq I, I \cap J \subseteq J$, nên theo Bổ đề 3.2, ta có $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I}\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{J}$. $\Rightarrow \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Từ đó ta nhận được $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Chứng minh $\sqrt{I_1 . I_2 \dots I_n} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n}$ $(n \geq 2)$.

Ta có $\begin{cases} I_1 . I_2 \dots I_n \in I_1 \\ I_1 . I_2 \dots I_n \in I_2 \\ \dots \\ I_1 . I_2 \dots I_n \in I_n \end{cases}$. Suy ra $I_1 . I_2 \dots I_n \subseteq I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$.

Theo Bổ đề 3.2 ta nhận được $\sqrt{I_1 . I_2 \dots I_n} \subseteq \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n}$. Lấy $x \in I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$. Khi đó, tồn tại $n \in N : x^n \in I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$. Suy ra $x^n \in I_1$, $x^n \in I_2$, $x^n \in I_n$. Do đó $(x^n)^n \in I_1 I_2 \dots I_n$. Hay $x^{n^2} \in I_1 I_2 \dots I_n$. Dẫn đến $x \in \sqrt{I_1 . I_2 \dots I_n}$. Nên ta có $\sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n} \subseteq \sqrt{I_1 . I_2 \dots I_n}$.

Vậy $\sqrt{I_1 . I_2 \dots I_n} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n}$.

*Chứng minh.*

$$\sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \dots \cap \sqrt{I_n} \ (n \geq 2).$$

Chứng minh quy nạp theo *n*. Với *n*=2, ta có $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ (đúng theo a).

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ $(k \geq 2)$, ta có

$$\sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \dots \cap \sqrt{I_k}.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$ $(k \geq 2)$, tức là chứng minh

$$\sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k \cap I_{k+1}} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \dots \cap \sqrt{I_k} \cap \sqrt{I_{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$\sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k \cap I_{k+1}} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k} \cap \sqrt{I_{k+1}} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \dots \cap \sqrt{I_k} \cap \sqrt{I_{k+1}}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Xét trường hợp $(P_i)_{i \in \Gamma}$ là họ tùy ý các iđêan nguyên tố của *R*, $\Gamma$ là tập chỉ số. Khi đó phép lấy căn được bảo toàn qua phép lấy giao của một họ tùy ý.

**Mệnh đề 3.7.** Cho $(P_i)_{i \in \Gamma}$ là họ các iđêan nguyên tố của *R*. Khi đó

$$\sqrt{\cap_{i \in \Gamma} P_i} = \cap_{i \in \Gamma} \sqrt{P_i}.$$

*Chứng minh.*

Theo Bổ đề 2.4, ta có $\sqrt{P_i} = P_i \ \forall \ i \in \Gamma$ nên để chứng minh mệnh đề ta cần chứng minh $\sqrt{\cap P_i} = \cap P_i$. Từ định nghĩa của iđêan căn ta có $\cap P_i \subseteq \sqrt{\cap P_i}$. Nên ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{\cap P_i} \subseteq \cap P_i$. Lấy $x \in \sqrt{\cap P_i}$, khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n \in \cap P_i$. Suy ra $x^n \in P_i \ \forall \ i \in \Gamma$. Vì $P_i$ là iđêan nguyên tố nên $x \in P_i \ \forall \ i \in \Gamma$ hay $x \in \cap P_i$.

Vậy mệnh đề được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 giới thiệu mối liên hệ giữa I và $\sqrt{I}$. Mục 3 chỉ ra iđêan căn bảo toàn qua phép lấy thương (Bổ đề 3.1, Mệnh đề 3.4), phép nhân, phép giao (Mệnh đề 3.6 và Mệnh đề 3.7) và phép cộng của các iđêan (Mệnh đề 3.5).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Tự Cường (2003), *Giáo trình đại số hiện đại*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
[2] Lê Tuấn Hoa (2003), *Đại số máy tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
[3] Ngô Việt Trung (2012), *Nhập môn đại số giao hoán và Hình học đại số*, Nxb. Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.
[4] Hoàng Xuân Sính (1972), *Đại số đại cương*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

# SOME EXTENDED PROPERTIES OF THE RADICAL OF IDEALS

**Le Quang Huy, Hoang Thi Minh Nhan**

ABSTRACT

*In this paper, we extend previous results of sum, multiplication and intersection of radical of ideals.*

**Keywords:** *Ring, ideal, radical of ideal.*

# MỘT SỐ TÍNH CHẤT CO RÚT TUYỆT ĐỐI, CO RÚT LÂN CẬN TUYỆT ĐỐI TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN METRIC COMPACT

**Nguyễn Thị Nga[1], Phạm Chí Công[2]**

TÓM TẮT

*Trong bài báo này chúng tôi chứng minh một số tính chất và định lý về co rút tuyệt đối và co rút lân cận tuyệt đối trong lớp các không gian metric compact.*

**Từ khoá:** *Co rút tuyệt đối, co rút lân cận tuyệt đối, không gian metric, không gian metric compact.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Về tính co rút tuyệt đối, co rút lân cận tuyệt đối trên không gian metric đã được Tạ Khắc Cư - Nguyễn Nhụy đưa ra tương đối đầy đủ trong [1]. Trong bài báo này chúng tôi chứng minh một số tính chất về co rút tuyệt đối trong lớp các không gian metric compact, đã được nêu nhưng chưa chứng minh.

***Định nghĩa 1.1.*** ([1]). *Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là r - ánh xạ nếu tồn tại ánh xạ $g: Y \to X$ là nghịch đảo phải của $f$ nghĩa là $f \circ g: Y \to Y$ là ánh xạ đồng nhất trên $Y$.*

***Định nghĩa 1.2.*** ([1]). *Giả sử $Y \subset X$, ánh xạ $f: X \to Y$ liên tục gọi là phép co rút nếu $f(x) = x$, $\forall x \in Y$. Khi đó ta nói $f$ co $X$ lên $Y$.*

Phép co rút là một trường hợp riêng của r - ánh xạ.

***Định nghĩa 1.3.*** ([1]). *Tập con $X_0$ của không gian $X$ được gọi là co rút của $X$ nếu tồn tại phép co rút từ $X$ lên $X_0$.*

***Định nghĩa 1.4.*** ([1]). *Tập con $X_0$ của không gian $X$ được gọi là co rút lân cận của $X$ nếu $X_0$ là co rút của tập mở $U$ mà $X_0 \subset U$.*

***Định nghĩa 1.5.*** ([1]). *Tập $A \subset X$ được gọi là co rút theo $X$ vào tập $B \subset X$ nếu ánh xạ lồng $i: A \to X$ đồng luân với ánh xạ $f: A \to X$ sao cho $f(A) \subset B$. Nếu $B$ chỉ gồm một điểm thì ta nói $A$ co rút theo $X$. Trong trường hợp riêng $i: X \to X$ đồng luân với $f: X \to X$ mà $f(x) = a \in X$ thì ta nói $X$ co rút điểm hay tự co rút.*

***Định lý 1.6.*** ([1]). *Nếu $X$ tự co rút thì mỗi r - ảnh của nó cũng tự co rút.*

Bây giờ, chúng ta xét các không gian tôpô Hausdorff đặc biệt, đó là các không gian metric. Ta viết $X \in M$ nếu $X$ metric hóa được.

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*
[2] *Phòng Hành chính tổng hợp, Trường Đại học Hồng Đức*

***Định nghĩa 1.7.*** ([1]). *Không gian $X$ là co rút tuyệt đối, đối với tất cả các không gian metric nếu $X \in M$ và với mỗi đồng phôi $h: X \to h(X)$, $h(X)$ đóng trong $Y$ thì mỗi tập $h(X)$ là co rút của $Y$. Khi đó ta viết $X \in \mathrm{AR}(M)$ hay X là AR(M) - không gian*

*Không gian $X$ được gọi là co rút lân cận tuyệt đối với tất cả các không gian mêtric nếu $X \in M$ và với mỗi đồng phôi $h: X \to h(X)$, $h(X)$ đóng trong $Y$ thì tập $h(X)$ là co rút lân cận của $Y$. Khi đó ta viết $X \in \mathrm{ANR}(M)$ hay X là ANR(M) - không gian.*

Ta có các định lý sau:

***Định lý 1.8.*** ([1]). *Giả sử rằng không gian $X$ là hợp của hai không gian $X_1$ và $X_2$, $X_0$ là giao của hai không gian $X_1$, $X_2$. Khi đó:*

*(i) $X_0$, $X_1$, $X_2$ là AR(M) - không gian thì $X$ là AR(M) - không gian.*

*(ii) $X_0$, $X_1$, $X_2$ là ANR(M) - không gian thì $X$ là ANR(M) - không gian.*

*(iii) $X_0$, $X$ là AR(M) - không gian thì $X_1$, $X_2$ là AR(M) - không gian.*

*(iv) $X_0$, $X$ là ANR(M) - không gian thì $X_1$, $X_2 \in$ ANR(M) - không gian.*

***Định lý 1.9.*** ([1]). *Tích đề các $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là AR(M) - không gian nếu và chỉ nếu $X_n$ là AR(M) - không gian, với mọi n.*

***Định lý 1.10.*** ([1]). *Tích đề các $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là ANR(M) - không gian nếu và chỉ nếu mọi $X_n$ là ANR(M) - không gian và hầu hết $X_n$ là AR(M) - không gian.*

*Định lý 1.11.* ([6]). *$X$ là AR(M) - không gian khi và chỉ khi $X \in$ ANR(M) - không gian và X co rút điểm.*

***Định nghĩa 1.12.*** ([6]). *Không gian X được gọi là co rút tuyệt đối hay là AR - không gian và viết là: $X \in$ AR - không gian nếu X compact (không gian metric compact) và X là AR(M) - không gian.*

*Không gian X được gọi là co rút lân cận tuyệt đối hay ANR - không gian và viết là $X \in$ ANR - không gian nếu X compact và X là ANR(M) - không gian.*

***Định lý 1.13.*** ([5]).

*(i) X là AR - không gian khi và chỉ khi X là r - ảnh của hình hộp Hinbe ($\mathrm{Q}^{\omega} = [0,1]^{\omega}$).*

*(ii) X là ANR - không gian khi và chỉ khi X là r - compact ảnh của tập con mở của hình hộp Hinbe.*

*Chú ý*: r - compact ảnh là ảnh của r - ánh xạ và ánh xạ compact (nghĩa là biến một tập bị chặn thành tập tiền compact).

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

***Tính chất 2.1.*** ([6]). *Mỗi r - ảnh của AR-không gian (hoặc ANR - không gian) là AR - không gian (hoặc ANR - không gian).*

*Chứng minh.*

(i) Mỗi r - ảnh của ANR - không gian là ANR - không gian.

Giả sử $X$ là AR-không gian. Theo định lý 1.13 ([5]) ta có $X = r(Q^{\omega})$, với r: $Q^{\omega} \to X$ là r - ánh xạ.

Giả sử $r': X \to r'(X)$ là r - ánh xạ. Khi đó ta có ánh xạ $r'$ o r: $Q^{\omega} \to r'(X)$. Do $r$, $r'$ là $r$ - ánh xạ nên $r' \circ r$ cũng là $r$ - ánh xạ. Như vậy $r'(X)$ là $r$ - ảnh của hình hộp Hinbe nên ta có $r'(X) \in$ AR - không gian.

(ii) Mỗi r - ảnh của ANR - không gian là ANR - không gian.

Giả sử $X$ là ANR - không gian. Theo định lý 1.13 ([5]) ta có $X = f(U)$, trong đó U mở $\subset Q^{\omega}$, $f$ là r - ánh xạ, compact từ U lên $X$ ($f: U \to X$). Giả sử $g': X \to g'(X)$ là r - ánh xạ. Khi đó $g' \circ f: U \to g'(X)$ là một r - ánh xạ, compact. Như vậy $g'(X)$ là r - ảnh, compact của tập con mở của hình hộp Hinbe $Q^{\omega}$. Nên ta có $g'(X) \in$ ANR - không gian

***Tính chất 2.2.*** ([6]). *$X \in$ AR-không gian khi và chỉ khi $X \in$ ANR-không gian và $X$ co rút điểm.*

*Chứng minh.*

Giả sử $X \in$ AR-không gian suy ra $X$ là AR(M) - không gian và $X$ compact. Theo định lý 1.11([6]) ta có $X$ là AR(M) - không gian và $X$ co rút điểm. Do đó $X \in$ ANR - không gian và co rút điểm.

Ngược lại $X \in$ ANR - không gian và co rút điểm suy ra $X$ là AR(M) - không gian và $X$ co rút điểm nên cũng theo định lý 1.11 ta suy ra $X$ là AR(M) - không gian. Kết hợp với $X$ compact ta có $X \in$ ANR - không gian.

***Tính chất 2.3.*** ([6]). *Mỗi ANR - không gian chỉ có hữu hạn thành phần liên thông.*

Để chứng minh định lý trên ta cần bổ đề sau:

Bổ đề. *Mỗi thành phần liên thông là tập đóng.*

Giả sử *$L_{x_i}$ là thành phần liên thông của $x_i$ trong $X \in$ ANR - không gian. Hiển nhiên ta có bao hàm thức:*

$$L_{x_i} \subset \overline{L_{x_i}} \qquad (1)$$

Mặt khác như ta đã biết bao đóng của tập liên thông cũng là tập liên thông nên $\overline{L_{x_i}}$ là tập liên thông. Vì $L_{x_i}$ là thành phần liên thông của $x_i$, tức nó là tập liên thông lớn nhất chứa $x_i$, do đó:

$$\overline{L_{x_i}} \subset L_{x_i} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\overline{L_{x_i}} = L_{x_i}$, tức $L_{x_i}$ là tập đóng.

*Chứng minh tính chất.*

Giả sử ngược lại rằng $X$ là ANR - không gian chứa vô số các thành phần liên thông $L_{x_i}$, i $\in$I. Khi đó $X \supseteq \bigcup_{i \in I} L_{x_i}, x_i \in X$. Vì $L_{x_i}$ đóng trong $X$ - compact suy ra $L_{x_i}$ compact. Với mỗi phủ mở $\left\{U^j_{x_i}\right\}_{j \in J}$ của $L_{x_i}$ thì ta có $\left\{\bigcup_{i \in J} U^j_{x_i}\right\}_{i \in I}$ $x_i \in X$, là phủ mở mở của $X$. Do

$L_{x_i}$ compact nên từ phủ mở $\left\{U^j_{x_i}\right\}_{j\in J}$ luôn trích ra được một phủ con hữu hạn. Nhưng với phủ mở $\left\{\bigcup_{i\in J} U^j_{x_i}\right\}_{i\in I}$ của $X$ lại không thể trích ra được một phủ con hữu hạn, vì $X$ chứa vô hạn các thành phần liên thông $L_{x_i}$. Như vậy $X$ không compact. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $X\in ANR$ - *không gian.*

Vậy $X$ chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông.

***Tính chất 2.4.*** ([6]). *Mỗi ánh xạ liên tục từ AR - không gian vào chính nó luôn có điểm bất động.*

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

*Bổ đề ([5]).* $Q^\omega$ *có tính chất điểm bất động.*

Thật vậy, do $Q^\omega$ là tập lồi nên với mọi $x$, $a\in Q^\omega$ ta có

$$f_t(x) = (1\text{-}t)\,x + ta, \text{ ta có } f_t(a) = a$$

Vậy $f_t(x)$ luôn có điểm bất động tức với mọi $t\in[0,1]$ nối 2 điểm bất kỳ trong $Q^\omega$ bao giờ cũng tồn tại $x_0$ sao cho $f_t(x_0) = x_0$.

Lấy $f_t(x) = (1\text{-}t)\,x + t\,f(x)$, trong đó $f: Q^\omega \to Q^\omega$ là ánh xạ liên tục.

Ta có $(1\text{-}t)\,x_0 + t\,f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Vậy $x_0$ là điểm bất động của $f$ hay $Q^\omega$ có tính chất điểm bất động.

*Chứng minh tính chất.*

Giả sử $X$ là AR - không gian. Theo định lý 1.13 tồn tại phép co rút $r$: $Q^\omega \to X$. Giả sử $f$ là ánh xạ liên tục từ $X$ vào $X$ ($f: X \to X$). Khi đó xét ánh xạ $g = i\circ f\circ r: Q^\omega \to Q^\omega$ với $i: X \to Q^\omega$ là ánh xạ nhúng. Do $Q^\omega$ có tính chất điểm bất động nên tồn tại $x_0 \in Q^\omega$ sao cho $g(x_0) = x_0$. Mà $g(x_0) = ifr(x_0) = i(f(r(x_0))) = f(r(x_0))$ nên với $x_0 \in X$ ta có:

$$x_0 = g(x_0) = f(r(x_0)) = f(x_0)$$

(Do r: $Q^\omega \to X$ là r - ánh xạ tức $r(x_0) = x_0$). Vậy $x_0$ cũng là điểm bất động của $f$.

***Định lý 2.5*** ([6]). *Nếu hợp và giao hai cái compact là AR - không gian (hoặc ANR - không gian) thì mỗi một từ chúng là AR - không gian (hoặc ANR - không gian)*

*Chứng minh.*

Giả sử $X = X_1 \cup X_2 \in$ AR - không gian (hoặc ANR - không gian), $X_0 = X_1 \cap X_2 \in$ AR - không gian (hoặc ANR - không gian) suy ra $X$, $X_0$ là AR(M) - không gian (hoặc ANR(M) - không gian) nên theo định lý 1.8 ta có $X_1, X_2$ là AR(M) - không gian (hoặc ANR(M) - không gian).

Mặt khác theo giả thiết ta có $X_1, X_2$ compact nên $X_1, X_2 \in$ AR - không gian (hoặc ANR - không gian) suy ra định lý được chứng minh.

***Định lý 2.6*** ([6]). *Tích đề các* $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *là AR - không gian khi và chỉ khi mỗi không gian thành phần* $X_n$ *là các AR - không gian.*

*Chứng minh.*

Giả sử $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là AR - không gian suy ra $X$ là AR(M) - không gian và $X$ compact. Theo định lý 1.9 ta có $X_n$ là AR(M) - không gian, $\forall n \in N^*$.

Mặt khác $X$ compact nên $X_n$ compact, $\forall n \in N^*$ (Vì $X_n = \varphi(X)$, $\varphi$ là phép chiếu từ $X$ xuống $X_n$). Do đó $X_n \in$ AR - không gian, $\forall n \in N^*$.

Ngược lại giả sử $X_n \in$ AR - không gian, với $\forall n \in N^*$ suy ra $X_n$ là AR(M) - không gian. Cũng theo định lý 1.9 ta có $X$ là AR(M) - không gian. Hơn nữa $X_n$ compact, với $\forall n \in N^*$ nên theo định lý Tikhônốp ta có $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ compact.

Vậy $X \in$ AR - không gian.

***Định lý 2.7*** ([6]). *Tích đề các* $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *là ANR - không gian khi và chỉ khi mỗi* $X_n \in$ *ANR - không gian và hầu hết các* $X_n \in$ *AR - không gian.*

*Chứng minh.*

Giả sử $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là ANR - không gian suy ra $X$ là ANR(M) - không gian và $X$ compact. Theo định lý 1.10 ta suy ra $X_n$ là ANR(M) - không gian và hầu hết các $X_n$ là AR(M) - không gian. Vì $X$ compact nên $X_n$ compact với $\forall n \in N^*$.

Vậy điều kiện cần của định lý được chứng minh.

Ngược lại nếu mỗi $X_n \in$ ANR - không gian và hầu hết các $X_n \in$ AR - không gian dẫn đến $X_n$ compact, $X_n$ là ANR(M) - không gian và hầu hết các $X_n$ là AR(M) - không gian. Khi đó cũng theo định lý 1.10 ta có $X$ là ANR(M) - không gian. Do $X_n$ compact với $\forall n \in N^*$ nên theo định lý Tikhônốp ta có $X$ compact. Vậy $X \in$ ANR - không gian.

***Định lý 2.8*** ([6]). *Nếu ARN - tập X nằm trong không gian* $E^n$ *thì* $E^n \backslash X$ *chỉ có hữu hạn thành phần liên thông.*

*Định lý 2.9* ([6]). *Nếu AR - tập X nằm trong không gian* $E^n$ *thì* $E^n \backslash X$ *liên thông đường với n > 1 và có 2 thành phần liên thông với n=1.*

*Chứng minh.*

Để chứng minh 2 định lý trên ta sử dụng.

*Mệnh đề ([1]). Giả sử* $G \neq \phi$ *là tập con mở, bị chặn của* $E^n$*, khi đó* $X = E^n \setminus G$ *không là co rút* $E^n$ và Bổ đề ([6]). *Nếu A là tập compact của* $E^n$*, là co rút lân cận của nó thì* $E^n \setminus A$ *có hữu hạn thành phần liên thông.*

*Chứng minh định lý 2.8.*

Giả sử $U$ là tập mở trong $E^n$, $r : U \to X$ là phép co rút từ $U$ lên $X$. Ta nhận thấy rằng ngoài $U$ có hữu hạn thành phần liên thông của $E^n \setminus X$. Vì nếu như $E^n \setminus X$ có vô hạn thành phần liên thông thì tồn tại ít nhất một thành bị chặn $G$ nằm trong $U$.

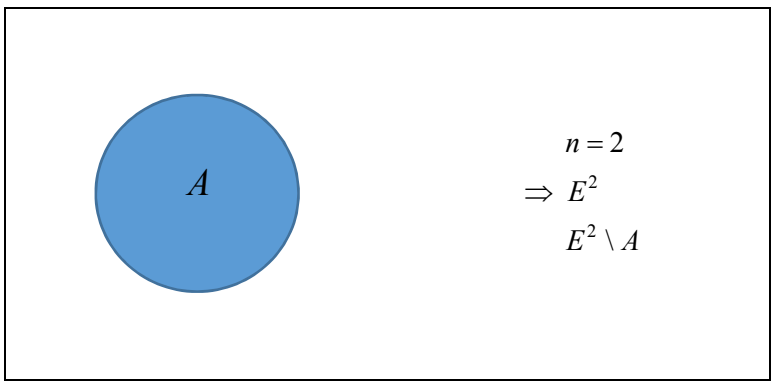
Đặt:
$$r'(x) = \begin{cases} r(x) & \forall x \in G, \\ x & \forall x \in E^n \setminus G \end{cases}$$

thì ta có $r' : E^n \to E^n \setminus G$ là phép co rút từ $E^n$ lên $E^n \setminus$G. Điều đó mâu thuẫn với mệnh đề ở trên. Như vậy ta đã chứng minh *x*ong định lý 2.8.

Bây giờ ta chứng minh định lý 2.9.

Do $X$ là co rút của $E^n$ ($E^n$ là $T_2$ - không gian) nên $X$ đóng trong $E^n$. $X$ đóng, bị chặn nên suy ra $E^n \setminus X$ chỉ có một thành phần không bị chặn (n>1). Thật vậy nếu tồn tại thành phần bị chặn của $E^n \setminus X$ thì mâu thuẫn với mệnh đề trên. Do đó $E^n \setminus X$ chỉ có một thành phần liên thông là chính nó.

Với n=l thì $E^1 = R$ (đường thẳng thực), thì ta có mỗi co rút của $E^1 = R$ hoặc là một điểm hoặc là một đoạn thẳng suy ra $E^1 \setminus X$ có hai thành phần liên thông.




**Hình 1. A là tập compact nằm trong mặt phẳng $E^2$**

## 3. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra và chứng minh được một số tính chất co rút tuyệt đối, co rút lân cạn tuyệt đối trên các không gian mêtric compact. Tuy nhiên sau khi hoàn thành bài báo chúng tôi tấy có một vấn đề được đặt ra như sau: nếu ta thay không gian metric compact bằng không gian metric tiền compact hoặc compact địa phương thì kết quả sẽ như thế nào? Vấn đề này chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Tạ Khắc Cư, Nguyễn Nhụy (1995), *Bài giảng lý thuyết co rút,* Nxb. Đại học Sư phạm Vinh, Tp. Vinh.

[2] NguyễnVăn Khuê (1999), *Không gian tôpô-độ đo và tích phân, Giải tích 3,* Nxb. Đại học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.

[3] Nguyễn Xuân Liêm (1996), *Tôpô đại cương, độ đo và tích phân,* Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[4] Đỗ Văn Lưu (*1999)* , *Giải tích hàm,* Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[5] Trần Trung, Mai Xuân Thảo, Nguyễn Xuân Thuần, Hoàng Văn Thi (2010), *Giải tích hiện đại,* Nxb. Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

[6] K.Brsuk (1967), *Theory of retracts – Warszaw.*

[7] Duke Math.L (1947), *An embedingfor paracompact metric space*.

[8] Fund. Math (1965), *On topological classification of complete linear metric spaces,* 250-288.

[9] John L. Kelley (1973), *Tô pô đại cương* (Hồ Thuần, Hà Huy Khoái biên dịch), Nxb. Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà Nội, Hà Nội.

[10] Schaefer H. (1971), *Topological vector spaces*. GTM 3. New York; Springer - Verlag.

# SOME ABSOLUTE CONTRACTION AND ABSOLUTE NEIGHBORHOOD CONTRACTION PROPERTIES IN THE CLASS OF COMPACT METRIC SPACES

**Nguyen Thi Nga, Pham Chi Cong**

ABSTRACT

*In this paper, we prove some absolute contraction and absolute neighborhood contraction properties in the compact metric spaces.*

**Keywords:** *Absolute contraction, absolute neighborhood contraction, metric space, metric compact space.*

# ẢNH HƯỞNG CỦA VIỆC THAY THẾ MG CHO SR LÊN TÍNH CHẤT TỪ CỦA $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$

**Nguyễn Tuấn Phương[1], Lê Viết Báu[2]**

TÓM TẮT

*Hệ mẫu perovskite $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$ được chế tạo bằng phương pháp phản ứng pha rắn thông thường. Tính chất cấu trúc được xác định bằng phép đo nhiễu xạ tia X. Tính chất từ được nghiên cứu thông qua phép đo từ nhiệt và từ hóa. Các kết quả cho thấy sự thay thế Mg cho Sr làm giảm hằng số mạng nhưng chưa quan sát thấy có sự chuyển pha cấu trúc. Sự thay thế này cũng làm giảm nhiệt độ chuyển pha về phía nhiệt độ phòng ít nhất cho đến 33% Mg thay thế. Phép tính từ nhiệt cho thấy mặc dù độ lớn của hiệu ứng giảm nhẹ nhưng nhiệt độ chuyển pha gần với nhiệt độ phòng và độ rộng vùng xảy ra hiệu ứng được mở rộng. Điều này hứa hẹn tiềm năng ứng dụng trong công nghệ làm lạnh bằng từ trường.*

**Từ khóa:** *Hệ mẫu perovskite $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$, tính chất từ.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong hơn 30 năm vừa qua, rất nhiều công trình nghiên cứu về hiệu ứng từ nhiệt của các hệ vật liệu từ, bởi tiềm năng ứng dụng của chúng trong công nghệ làm lạnh bằng từ trường. Tuy vậy, các vật liệu từ nhiệt mới thực sự được quan tâm nghiên cứu mạnh mẽ gần đây bởi tiềm năng ứng dụng của chúng trong công nghệ làm lạnh bằng từ trường ở vùng nhiệt độ phòng. Cho tới nay, đã có khá nhiều vật liệu đã được phát hiện cho hiệu ứng từ nhiệt lớn trong vùng 300K. Trong các vật liệu gốm, họ vật liệu từ perovskite manganie cũng đã được quan tâm nghiên cứu bởi có những họ vật liệu cho nhiệt độ chuyển pha cao, trên nhiệt độ phòng cũng như có mô men từ đáng kể [1, 2]. Vật liệu này cũng hứa hẹn cho hiệu ứng từ nhiệt, tuy nhiên vật liệu này có nhiệt độ chuyển pha (~370K) cao hơn nhiệt độ phòng nên sẽ có những vấn đề nhất định khi đưa vào ứng dụng thực tiễn. Một số nghiên cứu cho thấy khi thay thế Mn bởi một số ion khác, nhiệt độ chuyển pha có giảm về phía nhiệt độ phòng nhưng giá trị từ nhiệt giảm đáng kể [3]. Trong các nghiên cứu trước đây cũng cho thấy nhiệt độ chuyển pha của hệ vật liệu manganite còn phụ thuộc vào bán kính ion trung bình vị trí A [2]. Theo đó, khi bán kính ion trung bình vị trí A lệch khỏi ~1.245 $\mathring{A}$ . Chính vì vậy việc thay thế ion khác vào vị trí Sr trong vật liệu manganite $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$ có hy vọng giảm nhiệt độ chuyển pha của vật liệu này về nhiệt độ phòng. Trong nghiên cứu này, chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu về hiệu ứng từ nhiệt và các tham số cận chuyển pha khi thay thế Mg một phần cho Sr trong hệ vật liệu $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$.

[1] *Giáo viên Trường Trung học phổ thông Dương Đình Nghệ, huyện Thiệu Hóa, Thanh Hóa*
[2] *Giảng viên khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức*

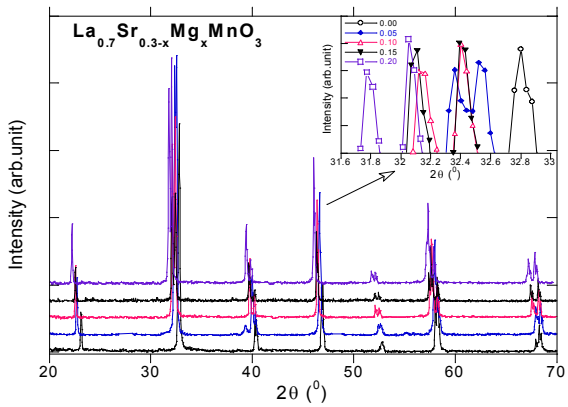
## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Thực nghiệm

Hệ mẫu $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$ ($x$ = 0 - 0.20) được chế tạo bằng phương pháp phản ứng pha rắn tại phòng thí nghiệm khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa. Các hóa chất ban đầu: $La_2O_3$, $SrCO_3$, MnO và MgO. Các hóa chất với độ tinh khiết 4N được nghiền trộn nhiều giờ trong cối mã não, được nung sơ bộ ở nhiệt độ $1100^0$C trong 48 giờ và thiêu kết ở $1380^0$C trong 36 giờ. Các kết quả được kiểm tra bằng nhiễu xạ tia X cho thấy các mẫu đơn pha cấu trúc, đảm bảo các yêu cầu chất lượng cho các nghiên cứu tiếp theo. Các phép đo từ được thực hiện trên hệ đo PPMS-6000.

### 2.2. Kết quả và thảo luận

Hình 1 trình bày các kết quả nhiễu xạ tia X cho các mẫu được đo trong từ trường 100 Oe.

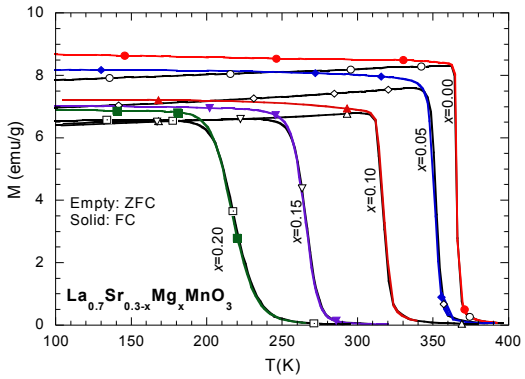



**Hình 1. Phổ nhiễu xạ tia X của các mẫu $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$**

Từ kết quả nhiễu xạ tia X cho thấy tất cả các mẫu đều thể hiện các đỉnh đặc trưng của hệ perovskite với cấu trúc rhobohedral thuộc nhóm không gian R3c. Mặc dù có một vài công bố cho thấy cấu trúc của $La_{1-x}Sr_xMnO_3$ là hexagonal [4] nhưng nhiều công bố cho thấy cấu trúc của hệ này chuyển từ orthohombic khi x≤0.2 đến rhombohedral thuộc nhóm R3c khi x = 0.3 [5,6]. Trong khi đó, có công trình lại cho rằng cấu trúc của $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$ là orthohombic với nhóm không gian Pbnm thậm chí cả khi thay thế 30% Cu cho Mn [7]. Sự khác nhau về các kết quả công bố theo chúng tôi có thể là do sự khác nhau về công nghệ chế tạo như đã được quan sát trong một số công trình nghiên cứu tương tự [1,8].

Như có thể nhìn thấy trên hình 1, các đỉnh nhiễu xạ hầu như dịch về phía góc 2θ bé hơn khi thay thế Mg cho Sr (hình phụ nhỏ bên trên, góc phải) nhưng chưa thấy có sự thay đổi lớn về các đỉnh nhiễu xạ. Điều này có thể dự đoán là với nồng độ 20% Mg thay thế cho Sr cũng chưa làm thay đổi cấu trúc tinh thể của hệ, không có dấu hiệu nào chứng tỏ có chuyển pha cấu trúc. Kết quả này cũng đã được quan sát trên một số hệ tương tự ngay cả khi thay thế vào vị trí B [9, 10, 11]. Mặc dù vậy, tại góc 2θ~66.50, mẫu x=0 tồn tại 1 đỉnh. Khi có mặt của Mg trong cấu trúc, đỉnh này trở thành đỉnh kép, nghĩa là có hai đỉnh rất sát nhau.

Sự tách nhau như thế cho thấy sự có mặt của Mg cũng đã làm cho ô mạng bị xô dịch và có thể gây ra méo mạng. Sự thay đổi về các thông số cấu trúc có thể nhận thấy qua dấu hiệu dịch các đỉnh nhiễu xạ khi thay thế Mg cho Sr trong cấu trúc. Điều này cho thấy đã có sự thay đổi các hằng số mạng dẫn đến sự thay đổi thể tích của ô mạng khi thay thế một phần Sr bởi Mg.




**Hình 2. Sự phụ thuộc nhiệt độ của từ độ được đo ở chế độ ZFC (rỗng) và FC (đặc) trong từ trường $\mu_0$H=100 G của hợp chất $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$**

Hình 2 trình bày các kết quả đo từ độ phụ thuộc nhiệt độ của các mẫu $La_{0.7}Sr_{0.3-1}Mg_xMnO_3$ trong từ trường $\mu_0$H=100 G theo các chế độ làm lạnh có từ trường (*FC*) và làm lạnh không có từ trường (*ZFC*).

Có thể nhận thấy một điều là các mẫu đều thể hiện chuyển pha khá sắc nét, đặt biệt là với mẫu *x*=0. Nhiệt độ chuyển pha sắt từ - thuận từ được xác định từ cực tiểu của các đường phụ thuộc nhiệt độ của d*M*/d*T* và được chỉ ra là ~364, 315, 265, và 216K lần lượt cho các mẫu x=0, 0.05, 0.10, 0.15 và 0.20.

Mẫu *x*=0 thể hiện chuyển pha sắt từ thuận từ tại $T_C$~364K, khá phù hợp với những kết quả nghiên cứu trước đây [1,3-5]. Khi thay thế Sr một phần bởi các Mg, nhiệt độ chuyển pha giảm đồng thời khoảng nhiệt độ xảy ra chuyển pha tăng lên. Sự suy giảm nhiệt độ cũng như sự mở rộng vùng chuyển pha khi thay thế một phần các nguyên tố cho vị trí Sr hay các kim loại kiềm thổ cho Mn trong hợp chất $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$ đều được quan sát trong các nghiên cứu trước đây [1, 3, 8].

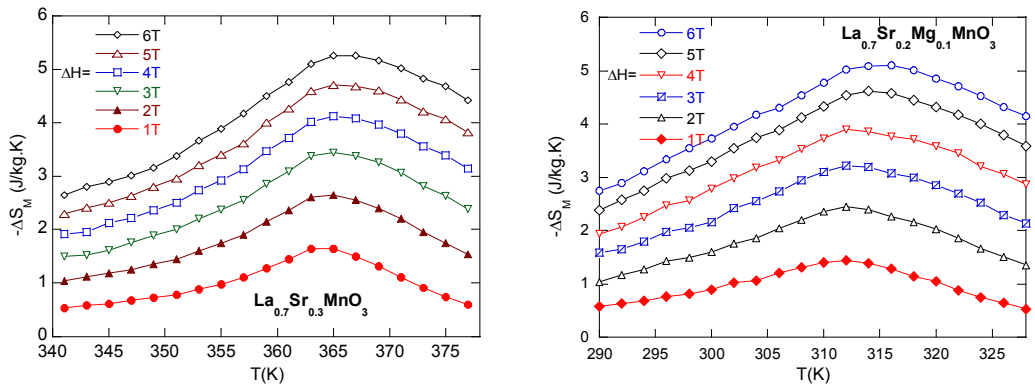
Sự suy giảm nhiệt độ chuyển pha được cho là do tương tác trao đổi kép (double exchange - DE) giữa các ion $Mn^{3+}$ và $Mn^{4+}$ thông qua $O^{2-}$ bị suy giảm. Trong trường hợp này, Mg và Sr đều có cùng hóa trị trong cấu trúc nên khi $Mg^{2+}$ được thay thế một phần cho $Sr^{2+}$ thì tỉ phần $Mn^{4+}/Mn^{3+}$ vẫn duy trì giá trị tối ưu. Bán kính của $Mg^{2+}$ (0.86 Å) bé hơn nhiều bán kính của $Sr^{2+}$ (1.32 Å) đã có thể làm tăng sự méo mạng (distortion), làm cho góc liên kết Mn-O-Mn lệch nhiều khỏi $180^0$. Trong khi đó, sự nhảy của các electron $e_g$ giữa các ion $Mn^{4+}$ và $Mn^{3+}$ thông qua $O^{2-}$ phụ thuộc vào góc liên kết Mn-O-Mn. Sự lệch khỏi $180^0$ của liên kết Mn-O-Mn khi thay thế một phần Mg cho Sr do đó đã làm giảm xác suất xảy ra tương tác trao đổi kép, làm giảm tính sắt từ của vật liệu.

Như chúng ta thấy sự thay đổi của từ độ theo nhiệt độ xảy ra mạnh nhất ở mẫu *x*=0 và suy giảm khi tăng nồng độ Mg thay thế cho Sr. Như vậy ngoài việc suy giảm nhiệt độ chuyển

pha, giá trị từ độ, tính chất chuyển pha cũng diễn ra ít quyết liệt hơn, đồng nghĩa với việc vùng nhiệt độ chuyển pha được mở rộng. Diễn biến của sự suy giảm khá phù hợp với diễn biến giảm của thừa số dung hạn và độ lệch khỏi giá trị trung bình bình phương của bán kính ion trung bình vị trí A. Sự mở rộng này cũng phù hợp với các phân tích ở trên. Theo đó, có sự tồn tại của các vùng phi sắt từ do góc liên kết Mn-O-Mn giảm, làm giảm (về thể tích) các vùng pha sắt từ [1]. Tuy nhiên vẫn tồn tại liên kết Mn-O-Mn nên khi nhiệt độ giảm, các liên kết này có thể xảy ra tương tác *DE* do sự suy giảm năng lượng kích thích nhiệt. Hơn nữa, có thể do các đám sắt từ vốn tồn tại trong vật liệu khi giảm nhiệt độ đã tạo ra trường nội tại, kích thích dần sự định hướng của các điện tử $e_g$ để có thể tham gia vào tương tác *DE*. Kết quả là quá trình chuyển pha xảy ra trong khoảng nhiệt độ càng rộng khi càng có ít đám sắt từ bên trong vật liệu, nghĩa là khi tăng nồng độ Mg thay thế cho Sr. Sự mở rộng vùng nhiệt độ xảy ra chuyển pha cũng có ý nghĩa rất quan trọng trong ứng dụng. Các hiệu ứng như hiệu ứng từ trở khổng lồ, hiệu ứng từ nhiệt chỉ xảy ra mạnh nhất tại vùng nhiệt độ chuyển pha trong khi đó để ứng dụng vào thực tiễn thì đòi hỏi các hiệu ứng phải hiện hữu trong vùng nhiệt độ càng lớn càng tốt. Nếu không thì chỉ có ý nghĩa trong phòng thí nghiệm bởi khi đưa vào thực tiễn thì đòi hỏi thiết bị phải hoạt động trong môi trường mà nhiệt độ môi trường có thể thay đổi. Các kết quả này cũng phù hợp với sự phụ thuộc bán kính ion trung bình vị trí A [2].

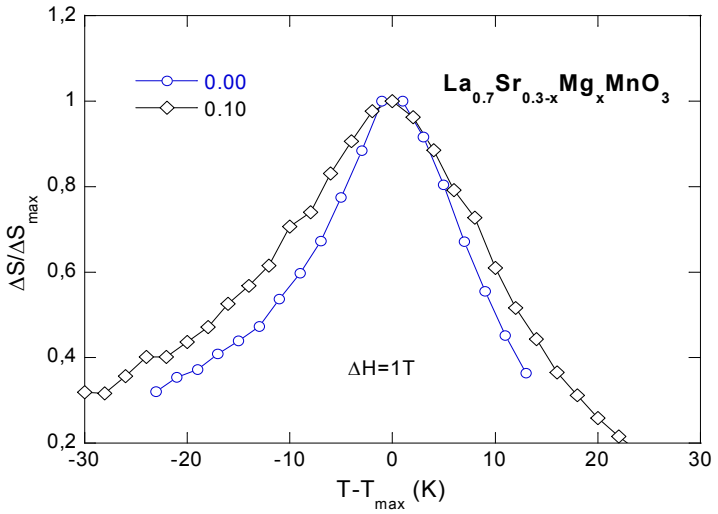
Một đặc trưng khác được quan sát đó là giá trị từ độ trong pha sắt từ ở 2 chế độ đo làm lạnh có từ trường và không có từ trường là khác nhau. Sự khác nhau này là một đặc trưng hết sức quan trọng cho thấy hiện tượng tách pha hay trạng thái thủy tinh đám (glassy cluster) hình thành trong pha sắt từ của vật liệu [1]. Theo đó, bên trong vật liệu không hoàn toàn đồng nhất ít nhất là về mặt pha từ tính mà thành nên những vùng pha từ khác nhau khi giảm nhiệt độ. Hiện tượng này không chỉ được quan sát trong các đa tinh thể mà ngay trong các đơn tinh thể, ở đó cấu trúc tinh thể là gần như lý tưởng [12, 13] được cho là hiện tượng tách pha trong vật liệu [1, 14].

Hình 3 trình bày các kết quả tính toán cho sự biến thiên entropy từ của các mẫu $x$=0 và $x$=0.10. Như có thể thấy trên hình vẽ, hiệu ứng từ nhiệt xuất hiện trong toàn dải nhiệt độ đo được. Tuy vậy, hiệu ứng lớn nhất tại lân cận nhiệt độ chuyển pha sắt từ - thuận từ.




**Hình 3. Sự biến thiên entropy từ của hợp chất $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$ và $La_{0.7}Sr_{0.2}Mg_{0.1}MnO_3$ khi có sự thay đổi khác nhau của từ trường từ 1-6T**

Mặc dù sự thay thế Mg cho Sr đã làm giảm hiệu ứng từ nhiệt nhưng chúng ta thấy nó đã kéo nhiệt độ xảy ra hiệu ứng về phía nhiệt độ phòng để có thể ứng dụng. Để xem xét ảnh hưởng của việc thay thế Mg cho Sr lên vùng nhiệt độ xảy ra hiệu ứng, sự phụ thuộc giá trị từ độ tương đối $\Delta S/\Delta S_{max}$ khi có sự biến thiên từ trường 1Tesla theo $\Delta T=T-T_{max}$ (với $T_{max}$ là nhiệt độ tại đó có cực đại biến thiên entropy từ) đã được xây dựng và trình bày trên hình 4.




**Hình 4. Sự phụ thuộc biến thiên nhiệt độ của giá trị tương đối biến thiên entropy từ của các hợp chất $La_{0.7}Sr_{0.3}MnO_3$ và $La_{0.7}Sr_{0.2}Mg_{0.1}MnO_3$**

Như có thể thấy, vùng nhiệt độ xảy ra hiệu ứng được mở rộng hơn. Sự mở rộng của vùng nhiệt độ này cũng sẽ làm tăng công suất làm lạnh của vật liệu [15]. Như vậy, sự thay thế Mg cho Sr mặc dù làm giảm nhẹ hiệu ứng nhưng đã đưa nhiệt độ xảy ra hiệu ứng về phía nhiệt độ phòng, đồng thời vùng nhiệt độ xảy ra hiệu ứng cũng được mở rộng và công suất làm lạnh có thể được cải thiện. Điều này rất có ý nghĩa trong việc tìm kiếm vật liệu có khả năng ứng dụng trong công nghệ làm lạnh bằng từ trường.

Như vậy, mặc dù độ lớn của hiệu ứng giảm chút ít nhưng ta thấy nhiệt độ xảy ra hiệu ứng đã được dịch về nhiệt độ phòng và đặc biệt là khoảng nhiệt độ xảy ra hiệu ứng được mở rộng. Điều này có ý nghĩa trong ứng dụng. Giá trị biến thiên entropy từ trong từ trường thay đổi 1 Tesla cũng rất gần với giá trị của mẫu $La_{0.95}K_{0.05}MnO_3$ [15] và cũng gần với các giá trị của các nghiên cứu trước đây [3, 8]. Khi tăng sự thay đổi của từ trường, ta thấy hiệu ứng từ nhiệt trở nên mạnh mẽ hơn. Tuy nhiên để có thể ứng dụng vào thực tiễn thì các giá trị cao của từ trường không được khuyến khích.

## 3. KẾT LUẬN

Hệ mẫu $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$ được chế tạo bằng phương pháp phản ứng pha rắn. Các phân tích dựa trên phổ nhiễu xạ tia X cho thấy các mẫu đơn pha với cấu trúc rhombohedral thuộc nhóm R3c. Sự thay thế Mg cho Sr làm giảm hằng số mạng và tăng méo mạng. Các quan sát chưa thấy có sự thay đổi cấu trúc tinh thể cho đến 1/3 lượng Sr bị thay thế bởi Mg.

Sự thay thế Mg cho Sr làm giảm nhiệt độ chuyển pha sắt từ - thuận từ. Với nồng độ dự đoán x=0.115 chuyển pha này sẽ diễn ra tại nhiệt độ phòng. Mặc dù sự thay thế Mg có làm giảm từ tính của vật liệu và do đó làm giảm hiệu ứng từ nhiệt nhưng nhiệt độ xảy ra hiệu ứng dịch về phía nhiệt độ phòng khi nồng độ Mg đạt x=0.11. Đặc biệt là vùng nhiệt độ xảy ra hiệu ứng cũng như công suất làm lạnh được cải thiện. Điều này có ý nghĩa quan trọng trong định hướng ứng dụng trong kỹ thuật làm lạnh bằng từ trường.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Lê Viết Báu (2006), *Ảnh hưởng của việc thay thế một số nguyên tố cho Mn lên các tính chất điện từ của perovskite (La, Sr)$MnO_3$*, Luận án Tiến sĩ khoa học vật liệu, Viện Khoa học Vật liệu, viện Hàn Lâm Khoa học Việt Nam.

[2] Kolat V. S., Esturk U., Izgi T., Gencer H., Atalay S., (2015), *The structural, magnetic and magnetocaloric properties of $La_{0.67}Ca_{0.33-x}Mg_xMnO_3$ (**x** = 0, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.33) compounds*, J. Alloys Compd, 628, pp.1-7.

[3] Lê Viết Báu, Nguyễn Mạnh An, Đào Nguyên Hoài Nam (2014), *Ảnh hưởng của việc thay thế Cu cho Mn lên các tham số trật tự và hiệu ứng từ nhiệt trong perovskite La0.7Sr0.3MnO3*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, 52, 3B, tr. 159-165.

[4] Hammouche A., Siebert E., Hammou A (1989), *Crystallographic, thermal and electrochemical properties of the system La1−xSrxMnO3 for high temperature solid electrolyte fuel cells*, Materials Research Bulletin, Volume 24, Issue 3, pp. 367-380.

[5] Chakraborty A., Sujatha Devi P., Maiti H.S (1994), *Preparation of La1−xSrxMnO3 ($0 \leqslant x \leqslant 0.6$) powder by autoignition of carboxylate-nitrate gels, Materials Letters*, Volume 20, Issues 1-2, pp. 63-69.

[6] Mukhin A. A., Ivanov V. Yu., Travkin V. D., Pimenov A., Loidl A. and Balbashov A. M. (2000), *Antiferromagnetic resonance in the canted phase of La1 − xSrxMnO3: Experimental evidence against electronic phase separatio*, EPL (Europhysics Letters), Volume 49, Number 4.

[7] Nanto D., Yu S. C. (2016), *Relative cooling power of La0.7Ca0.3Mn1-xCuxO3 ($0.0 \leq x \leq 0.03$)*, International Journal of Technology 3: pp. 417-423.

[8] Bau L. V., An N. M. (2016), *Magneto-electric properties and magnetic entropy change in perovskite La0.7Sr0.3Mn1-xTixO3*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 420, pp. 275-279.

[9] Miller D. N., Irvine J. T. S (2011), *B-site doping of lanthanum strontium titanate for solid oxide fuel cell anodes, Journal of Power Sources*, Volume 196, Issue 17, pp. 7323-7327.

[10] Mori M (2004), *Effect of B-site doing on thermal cycle shrinkage for La0.8Sr0.2Mn1−xMxO3+δ perovskites (M=Mg, Al, Ti, Mn, Fe, Co, Ni; 0≤x≤0.1)*, Solid State Ionics, Volume 174, Issues 1-4, pp. 1-8.

[11] Niu J.,Deng J., Lui W., Zhang L., Wang G., Dai H., He H., Xuehong (2007), *Nanosized perovskite-type oxides La1−xSrxMO3−δ (M = Co, Mn; x = 0, 0.4) for the catalytic removal of ethylacetate*, Catalysis Today, Volume 126, Issues 3-4, 30, pp. 420-429.

[12] Hwang H. Y., Cheong S.-W., Ong N. P., and Batlogg B., (1996), *Spin-Polarized Intergrain Tunneling in La2/3Sr1/3MnO3*, Phys. Rev. Lett. 77, pp. 2041 - 2044.

[13] Li X. W., Gupta A., Xiao G. and Gong G. Q., (1997), *Low-field magnetoresistive properties of polycrystalline and epitaxial perovskite manganite films*, Appl. Phys. Lett. 71 (8), pp. 1124 - 1126.

[14] Dagotto E., (2002), *Nanoscale Phase Separation and Colossal Magnetoresistance*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[15] Tran Dang Thanh, Dinh Chi Linh, Pham Duc Huyen Yen, Nguyen Thi Ha, Le Viet Bau, Vu Hong Ky, Hong-Guang Piao, Nguyen Manh An and Seong-Cho Yu (2016), *Second-order phase transition with coexistence of short- and long-range ferromagnetic order in La1-xKxMnO3 compounds*, 3rd International Symposium on Frontiers in Materials Science 28-30 September, 2016, Hanoi - Vietnam.

# INFLUENCE OF SUBSTITUTION MG FOR SR ON MAGNETIC PROPERTY OF THE PEROVSKITE $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$

**Nguyen Tuan Phuong, Le Viet Bau**

ABSTRACT

*The compounds of $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$ (x =0-0.20) have been fabricated by conventional solid state reaction. The structure is checked by X-ray diffraction. Magnetic properties have been explored using PPMS. The data shows that the substitution Mg for Sr decreases lattice parameters but the structure transition is not observed. This substitution also decreases FM-PM transition temperature toward room temperature for x<0.15. Despite decreasing slightly magnetocaloric effect, the temperature that this locates effect shifts to room temperature. It is interesting that the temperature range in which existing this effect is broadened. Those have a potention in coolling technology.*

**Keywords:** *Perovskite $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$, magnetic property.*

# MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐẠO HÀM LIE CỦA CÁC LIÊN THÔNG TUYẾN TÍNH TRÊN ĐẠI SỐ

**Nguyễn Hữu Quang[1], Đỗ Thị Tuyết[2], Lê Thị Thanh Hà[3]**

TÓM TẮT

*Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số tính chất đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính $\widehat{\nabla}$ và $\nabla^a$ trên đại số A.*

**Từ khóa:** *Đạo hàm Lie, liên thông tuyến tính, đại số.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

**1.1.** Các liên thông tuyến tính trên đại số thường được sử dụng để khảo sát các đặc trưng của một đại số. Trong những năm gần đây, các tính chất cơ bản của các phép đạo hàm trên đại số đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn, năm 2010 Sultanov [3] đã trình bày các tính chất cơ bản của đạo hàm Lie trên một đại số giao hoán $A$ với đơn vị $e$ và từ đó tác giả thiết lập các hệ thức về độ cong và độ xoắn của $A$. Năm 2012, các tác giả Nguyễn Hữu Quang, Kiều Phương Chi, Bùi Cao Vân [2] đã xây dựng phép đạo hàm Lie trên các dòng và ứng dụng của nó vào việc tính thể tích của các đa tạp Compact. Năm 2014, Arslan và Inceboz [1] đã chỉ ra các đặc trưng của đạo hàm Jordan trên một đại số *Banach.*

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số tính chất đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính $\widehat{\nabla}$ và $\nabla^a$ được cảm sinh bởi liên thông tuyến tính $\nabla$ trên một đại số $A$ giao hoán với đơn vị $e$. Từ đó thiết lập một số hệ thức về độ xoắn của $A$.

**1.2.** Giả sử $A$ là một đại số giao hoán với đơn vị $e$ trên $\mathbb{R}$.

Một phép đạo hàm trên $A$ là một ánh xạ tuyến tính $X : A \to A$, thỏa mãn tính chất: $X(a.b) = X(a).b + a.X(b); \forall a, b \in A$. Ta ký hiệu $F = \{\text{X/X là đạo hàm trên } A\}$. Các phép toán trên $F$ được xác định như sau:

1) $(X+Y)(a) = X(a) + Y(a); \forall X, Y \in F, \forall a \in A.$

2) $(\lambda.X)(a) = \lambda.(X(a)); \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in A.$

3) $(a.X)(b) = a.X(b); \forall b \in A, a \in A.$

Khi đó $F$ cùng với 1) và 2) lập thành không gian vectơ thực và $F$ cùng với 1) và 3) lập thành A - môđun.

[1] *Giảng viên khoa Khoa học tự nhiên, Trường Đại học Vinh*
[2] *Giảng viên khoa Khoa học cơ bản và Kỹ thuật cơ sở Thanh Hóa, Trường Đại học Công Nghiệp thành phố Hồ Chí Minh*
[3] *Khoa Cơ bản, Trường Cao đẳng Giao thông vận tải 2, thành phố Đà Nẵng*

Một liên thông tuyến tính trên $A$ là ánh xạ $\nabla : F \times F \to F,$ thỏa mãn: $\forall X, Y, Z \in F$ và $a \in A$ : $T_1.\ \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z.$

$T_2.\ \nabla_{aX} Z = a.\nabla_X Z.$

$T_3.\ \nabla_X \left(Y + Z\right) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

$T_4.\ \nabla_X \left(a.Y\right) = X\left(a\right).Y + a.\nabla_X Y.$

**1.3. Định nghĩa [3]**

Giả sử $X \in F$. Đạo hàm Lie của $\nabla$ theo hướng $X$ được ký hiệu $L_X \nabla$ và được xác định bởi: $\left(L_X \nabla\right)\left(Y, Z\right) = \left[X, \nabla_Y Z\right] - \nabla_Y \left[X, Z\right] - \nabla_{[X,Y]} Z;\ \ \forall Y, Z \in F,$ (ở đây: $\left[X, Y\right]$ là tích Lie của $X$ và $Y$ được cho bởi $\left[X, Y\right] = X \circ Y - Y \circ X$ ).

Ví dụ: Ta xét không gian $\mathbb{R}^n$ với liên thông Lêvi-Sivita $D$ và $A = \Im\left(\mathbb{R}^n\right) = \{ f / f$ là hàm trơn trên $\mathbb{R}^n \ \}$. Khi đó, với $X \in F = \mathrm{B}\left(\mathbb{R}^n\right) = \{$ Các trường vectơ trơn trên $\mathbb{R}^n \ \}$ và $X$ song song thì $L_X D = 0.$

**1.4. Mệnh đề ([3]; p.385)**

a) $L_X \nabla$ là ánh xạ song tuyến tính thực: $F \times F \to F.$

b) $L_{\alpha X + \beta Y} \nabla = \alpha . L_X \nabla + \beta . L_Y \nabla; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall X, Y \in F.$

c) $L_{[X,Y]} \nabla = L_X \circ L_Y \nabla - L_Y \circ L_X \nabla; \forall X, Y \in F.$

Bây giờ ta chú ý tới hai ánh xạ sau đây được cảm sinh từ liên thông tuyến tính $\nabla$ trên $A$ $\left(\left[3\right], p381\right)$:

- $\widehat{\nabla}$: $F \times F \to F$

$\left(X, Y\right) \mapsto \widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + \left[X, Y\right].$

- Với $a \in A,\ \nabla^a : F \times F \to F$

$\left(X, Y\right) \mapsto \nabla^a_X Y = a.\nabla_X Y + \left(e - a\right).\widehat{\nabla}_X Y$ .

Mệnh đề $\left[3\right]$. $\widehat{\nabla}$ và $\nabla^a$ là các liên thông tuyến tính trên $A.$

2. CÁC KẾT QUẢ

Trong suốt mục này, ta ký hiệu $T,\ \widehat{T},\ T^a$ tương ứng là các độ xoắn của $A$ ứng với các liên thông tuyến tính $\nabla,\ \widehat{\nabla},\ \nabla^a$ chúng được xác định bởi:

$T\left(X, Y\right) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \left[X, Y\right];\ \widehat{T}\left(X, Y\right) = \widehat{\nabla}_X Y - \widehat{\nabla}_Y X - \left[X, Y\right];$

$$T^a(X,Y)=\nabla^a_X Y-\nabla^a_Y X-[X,Y];\forall X,Y\in F.$$

**2.1. Nhận xét**

a) Với $A=\Im(\mathbb{R}^n)$ và $\nabla=D$. Khi đó $\hat{T}=0$.

b) Nếu $a=\frac{1}{2}e$ thì $T^a=0$.

*Chứng minh.*

$\forall X,Y\in F=\mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$, ta có:

$$\begin{aligned}\hat{T}(X,Y)&=\hat{D}_X Y-\hat{D}_Y X-[X,Y]\\&=D_Y X+[X,Y]-D_X Y-[Y,X]-[X,Y]\\&=-(D_X Y-D_Y X-[X,Y])\\&=T(X,Y)=0.\\&\Rightarrow\hat{T}=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^a(X,Y)&=\nabla^a_X Y-\nabla^a_Y X-[X,Y]\\&=\left(\frac{1}{2}e.\nabla_X Y+\frac{1}{2}e.\hat{\nabla}_X Y\right)-\frac{1}{2}e\left(\nabla_Y X+\hat{\nabla}_Y X\right)-[X,Y]\\&=\frac{1}{2}\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]\right)+\frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_X Y-\hat{\nabla}_Y X-[X,Y]\right)\\&=\frac{1}{2}\left(T(X,Y)+\hat{T}(X,Y)\right);\ (1)\end{aligned}$$

Mặt khác, $\hat{T}(X,Y)=\hat{\nabla}_X Y-\hat{\nabla}_Y X-[X,Y]$

$$\begin{aligned}&=\left(\nabla_Y X+[X,Y]\right)-\left(\nabla_X Y+[Y,X]\right)-[X,Y]\\&=-\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]\right)\\&=-T(X,Y);\ (2).\end{aligned}$$

Từ $(1)$ và $(2)$, ta thu được $T^a=0$; với $a=\frac{1}{2}e$.

Từ $(2.1,b)$, ta nhận thấy rằng, trên đại số $A$ luôn tồn tại một liên thông tuyến tính mà ứng với nó $A$ có độ xoắn bằng $0$. Hay nói khác đi, trên $A$ luôn tồn tại liên thông tuyến tính phẳng.

**2.2. Mệnh đề**

$$(L_X\nabla)(Y,Z)=\left[X,\hat{\nabla}_Z Y\right]-\hat{\nabla}_{[X,Z]}Y-\hat{\nabla}_Z[X,Y];\forall X,Y,Z\in F.$$

*Chứng minh.*

$$\left[X,\widehat{\nabla}_Z Y\right]-\widehat{\nabla}_{[X,Z]}Y-\widehat{\nabla}_Z\left[X,Y\right]=\left[X,\nabla_Y Z+\left[Z,Y\right]\right]-\left(\nabla_Y\left[X,Z\right]+\left[\left[X,Z\right],Y\right]\right)$$

$$-\left(\nabla_{[X,Y]}Z+\left[Z,\left[X,Y\right]\right]\right)$$

$$=\left[X,\nabla_Y Z\right]+\left[X,\left[Z,Y\right]\right]-\nabla_Y\left[X,Z\right]+\left[Y,\left[X,Z\right]\right]-\nabla_{[X,Y]}Z+\left[Z,\left[Y,X\right]\right]$$

$$=\left(\left[X,\nabla_Y Z\right]-\nabla_Y\left[X,Z\right]-\nabla_{[X,Y]}Z\right)+\left(\left[X,\left[Z,Y\right]\right]+\left[Y,\left[X,Z\right]\right]+\left[Z,\left[Y,X\right]\right]\right)$$

$$=\left[X,\nabla_Y Z\right]-\nabla_Y\left[X,Z\right]-\nabla_{[X,Y]}Z\ =\left(L_X\nabla\right)(Y,Z).$$

Mệnh đề này xác lập mối quan hệ giữa đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính $\nabla$ và liên thông tuyến tính cảm sinh $\widehat{\nabla}$. Một hệ thức khác về quan hệ giữa đạo hàm Lie của $\nabla$ và $\widehat{\nabla}$ cũng được Sultanov thiết lập $\left([3].p.388\right)$, đó là: $\left(L_X\nabla\right)(Y,Z)=\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Z,Y)$.

**2.3. Nhận xét**

$\forall X,Y,Z,Y',Z'\in F$ và $\forall a\in A$, ta có:

1) $\left(L_X\widehat{\nabla}\right)\left(Y+Y',Z\right)=\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,Z)+\left(L_X\widehat{\nabla}\right)\left(Y',Z\right)$

2) $\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(a.Y,Z)=a.\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,Z)$

3) $\left(L_X\widehat{\nabla}\right)\left(Y,Z+Z'\right)=\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,Z)+\left(L_X\widehat{\nabla}\right)\left(Y,Z'\right)$

4) $\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,a.Z)=a.\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,Z).$

*Chứng minh.*

Ta dễ dàng kiểm tra được tính chất 1) và 3). Ở đây, ta kiểm tra tính chất 2) và 4).

2) $\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(a.Y,Z)=\left[X,\widehat{\nabla}_{a.Y}Z\right]-\widehat{\nabla}_{[X,a.Y]}Z-\widehat{\nabla}_{a.Y}\left[X,Z\right]$

$$=\left[X,a.\widehat{\nabla}_Y Z\right]-\widehat{\nabla}_{(X(a).Y+a.[X,Y])}Z-a.\widehat{\nabla}_Y\left[X,Z\right]$$

$$=X(a).\widehat{\nabla}_Y Z+a.\left[X,\widehat{\nabla}_Y Z\right]-X(a).\widehat{\nabla}_Y Z-a.\widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z-a.\widehat{\nabla}_Y\left[X,Z\right]$$

$$=a.\left(\left[X,\widehat{\nabla}_Y Z\right]-\widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\widehat{\nabla}_Y\left[X,Z\right]\right)$$

$$=a.\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,Z).$$

4) $\left(L_X\widehat{\nabla}\right)(Y,a.Z)=\left[X,\widehat{\nabla}_Y\left(a.Z\right)\right]-\widehat{\nabla}_{[X,Y]}\left(a.Z\right)-\widehat{\nabla}_Y\left[X,a.Z\right]$

$$=\left[X,Y(a).Z+a.\widehat{\nabla}_Y Z\right]-\left[X,Y\right](a).Z-a.\widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\widehat{\nabla}_Y\left(X(a).Z\right)+a.\left[X,Z\right]$$

$$=\left[X,Y(a)Z\right]+\left[X,a.\hat{\nabla}_Y Z\right]-\left[X,Y\right](a).Z-a.\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\hat{\nabla}_Y\left(X(a)Z\right)-\hat{\nabla}_Y\left(a\left[X,Z\right]\right)$$

$$=X\left(Y(a)\right)Z+Y(a)\left[X,Z\right]+X(a).\hat{\nabla}_Y Z+a.\left[X,\hat{\nabla}_Y Z\right]-\left[X,Y\right](a).Z-a.\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z-Y\left(X(a)\right)Z$$

$$-X(a).\hat{\nabla}_Y Z-Y(a).\left[X,Z\right]-a.\hat{\nabla}_Y\left[X,Z\right]$$

$$=a.\left(\left[X,\hat{\nabla}_Y Z\right]-\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\hat{\nabla}_Y\left[X,Z\right]\right)+\left(X\left(Y(a)\right)Z-Y\left(X(a)\right).Z-\left[X,Y\right](a).Z\right)$$

$$=a\left(\left[X,\hat{\nabla}_Y Z\right]-\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\hat{\nabla}_Y\left[X,Z\right]\right)$$

$$=a.\left(L_X\hat{\nabla}\right)(Y,Z).$$

Nhận xét $(2.3)$ thực chất khẳng định rằng $L_X\hat{\nabla}$ là một ánh xạ song tuyến tính từ các môđun $F\times F\to F.$

Mệnh đề sau đây thiết lập mối quan hệ giữa độ xoắn $T$ và liên thông $\nabla^a.$

**2.4. Mệnh đề**

Với mỗi $a\in A$ thì $\nabla^a=(a-e).T+\nabla.$

Chứng minh: Với $\forall Y,Z\in F,$ ta nhận được:

$$\nabla^a_Y Z=a.\nabla_Y Z+(e-a).\hat{\nabla}_Y Z$$

$$=a.\nabla_Y Z+(e-a)\left(\nabla_Z Y+\left[Y,Z\right]\right)$$

$$=(a-e)\left(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y-\left[Y,Z\right]\right)+\nabla_Y Z$$

$$=\left((a-e)T+\nabla\right)(Y,Z).$$

$$\Rightarrow\nabla^a=(a-e).T+\nabla.$$

**2.5. Hệ quả**

Giả sử $a\in A$ mà $(a-e)$ khả nghịch và $b$ là phần tử nghịch đảo của $(a-e)$. Khi đó $T=b\left(\nabla^a-\nabla\right).$

Từ hệ quả $(2.5)$, ta nhận thấy rằng nếu $A$ là một miền nguyên thì $\nabla=\nabla^{\frac{e}{2}}.$

Bây giờ ta thiết lập mối quan hệ giữa độ cong $T$ ứng với liên thông tuyến tính $\nabla$ và đạo hàm Lie của $\nabla^a.$

**2.6. Định lý**

$$L_X\nabla^a=a.L_X\nabla+(e-a)L_X\hat{\nabla}+X(a).T;\ \ X\in F,a\in A.$$

*Chứng minh.*

$$L_X\nabla^a(Y,Z)=\left[X,\nabla^a_Y Z\right]-\nabla^a_Y[X,Z]-\nabla^a_{[X,Y]}Z$$
$$=\left[X,a.\nabla_Y Z+(e-a).\hat{\nabla}_Y Z\right]-\nabla^a_Y[X,Z]-\nabla^a_{[X,Y]}Z$$
$$=a\left([X,\nabla_Y Z]-\nabla_Y[X,Z]-\nabla_{[X,Y]}Z\right)+(e-a)\left(\left[X,\hat{\nabla}_Y Z\right]-\hat{\nabla}_Y[X,Z]-\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z\right)$$
$$+X(a).\nabla_Y Z+X(e-a).\hat{\nabla}_Y Z$$
$$=a.(L_X\nabla)(Y,Z)+(e-a)\left(L_X\hat{\nabla}\right)(Y,Z)+X(a).\nabla_Y Z+X(e).\hat{\nabla}_Y Z-X(a)\hat{\nabla}_Y Z$$

Mặt khác:

$$X(e)=X(e.e)=2X(e)\ \Rightarrow X(e)=0;\forall X\in F.$$

Vậy:

$$\left(L_X\nabla^a\right)(Y,Z)=a.(L_X\nabla)(Y,Z)+X(a)\left(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y-[Y,Z]\right)+(e-a).\left(L_X\hat{\nabla}\right)(Y,Z)$$
$$\Rightarrow\ \left(L_X\nabla^a\right)(Y,Z)=\left(a.L_X\nabla+(e-a).L_X\hat{\nabla}+X(a).T\right)(Y,Z);\forall Y,Z\in F$$
$$\Rightarrow\ L_X\nabla^a=a.L_X\nabla+(e-a)L_X\hat{\nabla}+X(a).T.$$

**2.7. Định nghĩa**

Với $X\in F$, đạo hàm Lie theo hướng $X$ của $T$, $\hat{T}$ và $T^a$ tương ứng được ký hiệu bởi $L_XT$, $L_X\hat{T}$ và $L_XT^a$ và chúng được xác định bởi:

a) $(L_XT)(Y,Z)=\left[X,T(Y,Z)\right]-T\left([X,Y],Z\right)-T\left(X,[Y,Z]\right);\forall Y,Z\in F.$

b) $\left(L_X\hat{T}\right)(Y,Z)=\left[X,\hat{T}(Y,Z)\right]-\hat{T}\left([X,Y],Z\right)-\hat{T}\left(X,[Y,Z]\right);\forall Y,Z\in F.$

c) $\left(L_XT^a\right)(Y,Z)=\left[X,T^a(Y,Z)\right]-T^a\left([X,Y],Z\right)-T^a\left(X,[Y,Z]\right);\forall Y,Z\in F.$

**2.8. Định lý**

$L_X\hat{T}=L_X\hat{\nabla}-L_X\nabla;\ \ X\in F.$

*Chứng minh.*

$$\left(L_X\hat{T}\right)(Y,Z)=\left[X,\hat{T}(Y,Z)\right]-\hat{T}\left([X,Y],Z\right)-\hat{T}\left(X,[Y,Z]\right);\forall Y,Z\in F.$$
$$=\left[X,\hat{\nabla}_Y Z-\hat{\nabla}_Z Y-[Y,Z]\right]-\left(\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\hat{\nabla}_Z[X,Y]-\left[[X,Y],Z\right]\right)$$
$$-\left(\hat{\nabla}_Y[X,Z]-\hat{\nabla}_{[X,Z]}Y-\left[Y,[X,Z]\right]\right)$$
$$=\left[X,\hat{\nabla}_Y Z\right]-\left[X,\hat{\nabla}_Z Y\right]-\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z+\hat{\nabla}_Z[X,Y]-\hat{\nabla}_Y[X,Z]+\hat{\nabla}_{[X,Z]}Y \qquad (1)$$

$$\left(L_X\hat{\nabla}\right)(Y,Z)=\left[X,\hat{\nabla}_Y Z\right]-\hat{\nabla}_{[X,Y]}Z-\hat{\nabla}_Y\left[X,Z\right] \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\left(L_X\nabla\right)(Y,Z)&=\left[X,\nabla_Y Z\right]-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_Y\left[X,Z\right]\\&=\left(L_X\hat{\nabla}\right)(Z,Y)\\&=\left[X,\hat{\nabla}_Z Y\right]-\hat{\nabla}_{[X,Z]}Y-\hat{\nabla}_Z\left[X,Y\right]\end{aligned} \tag{3}$$

Từ $(1),(2),(3)$, ta thu được $\left(L_X\hat{T}\right)(Y,Z)=\left(L_X\hat{\nabla}-L_X\nabla\right)(Y,Z);\forall Y,Z\in F.$

Sử dụng hệ thức của Sultanov $[3;p.382]$ : $T^a=(2a-e)T$ và từ định nghĩa $(2.7,c)$, ta nhận được mệnh đề sau đây:

**2.9. Mệnh đề**

$L_XT^a=(2a-e)L_XT+2X(a)T;\ \forall X\in F;a\in A.$

*Chứng minh.*

Với $\forall Y.Z\in T$, ta có:

$$\begin{aligned}&\left(L_XT^a\right)(Y,Z)=\left[X,T^a(Y,Z)\right]-T^a\left(\left[X,Y\right],Z\right)-T^a\left(Y,\left[X,Z\right]\right)\\&=\left[X,(2a-e).T(Y,Z)\right]-(2a-e).T\left(\left[X,Y\right],Z\right)-2(a-e).T\left(Y,\left[X,Z\right]\right)\\&=(2a-e)\left(\left[X,T(Y,Z)\right]-T\left(\left[X,Y\right],Z\right)-T\left(Y,\left[X,Z\right]\right)\right)+X(2a-e).T(Y,Z)\\&=(2a-e).(L_XT)(Y,Z)+X(2a-e).T(Y,Z)\\&=\left((2a-e).L_XT+X(2a-e).T\right)(Y,Z);\forall Y,Z\in F\\&\Rightarrow\ L_XT^a=(2a-e).L_XT+X(2a-e).T\\&=(2a-e)L_XT+2.X(a).T.\end{aligned}$$

Từ mệnh đề $(2.9)$, với $a=\dfrac{e}{2}$ thì cũng có $L_XT^a=0$ và với $a=e$ thì $L_XT^e=L_XT.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Arslan.B and Inceboz.H (2014), *A characterization of generadized Jordon derivations on Banach algebras*, Period. Math. Hung, vol. 69, pp. 139-148.

[2] Nguyen Huu Quang, Kieu Phương Chi and Bui Cao Van (2012) *The Lie derivation of k-current on the Lie group*, Lobasevski Journal of Math, vol. 133, no.1, pp. 1-11.

[3] A.Ya.Sultanov (2010), *Derivations of linear algebras and linear connections*, Journal of Math Sciences, vol. 169, no.3, pp. 362-412.

# SOME LIE DERIVATIONS PROPERTIES OF LINEAR CONNECTIONS ON ALGEBRAS

**Nguyen Huu Quang, Do Thi Tuyet, Le Thi Thanh Ha**

ABSTRACT

*In this paper, we present the some Lie derivations properties of linear connections* $\widehat{\nabla}$ *and* $\nabla^a$ *on algebra A.*

**Keywords:** *Lie derivations, linear connections, algebras.*

# VAI TRÒ CẢM BIẾN TRONG MẠNG VẠN VẬT

**Lê Văn Quang**[1]

TÓM TẮT

*Theo số liệu của Công ty nghiên cứu thị trường Gartner, năm 2017, các công ty dự kiến sẽ chi 3,5 tỷ USD cho công nghệ thông tin (CNTT), trong đó tập trung nâng cấp phần mềm và dịch vụ thay cho phần cứng. Đặc biệt, Internet kết nối vạn vật (Internet of things - IOT) sẽ là xu hướng trên toàn cầu. Không nằm ngoài trào lưu này, Việt Nam cũng nhanh chóng chuẩn bị cho thời kỳ bùng nổ của vạn vật kết nối qua Internet. Bài báo đã đưa ra mô hình ghép nối cảm biến với máy tính, sử dụng ngôn ngữ lập trình phần mềm điều khiển cảm biến.*

**Từ khoá:** *Internet kết nối, cảm biến, mô hình ghép nối.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Như chúng ta đã biết Internet Of things (IOT) là mạng lưới vạn vật kết nối Internet. Khi mà vạn vật đều có chung một mạng kết nối thì việc liên lạc và làm việc trở nên thuận lợi, dễ dàng, nhanh chóng, hiệu quả. Khi vạn vật đều được kết nối chúng ta kiểm soát tìm kiếm được mọi thứ.

**Hình 1. Internet of Things**

Ví dụ: Giả sử chúng ta có thẻ cá nhân được tích hợp công nghệ IOT, chúng ta kiểm tra số lượng tiền trong thẻ, kiểm tra ngày hết hạn của thẻ, bảo hiểm y tế và nhiều thông tin khác, cũng như thông báo tình trạng của nó đến cho chúng ta biết thông qua các ứng dụng SMS, facebook, zalo...

[1] *Giảng viên khoa Công nghệ Thông tin và Truyền thông, Trường Đại học Hồng Đức*

Một hệ thống tưới nước tự động cây cối trong gia đình tích hợp công nghệ IOT, khi chúng ta xa nhà, thông qua điện thoại hoặc máy tính kết nối vào Internet thi hành các câu lệnh vận hành hệ thống tưới nước tự động có tích hợp công nghệ IOT.

Ví dụ: Trong sản xuất hàng tiêu dùng hiện nay và trong tương lai, tích hợp công nghệ IOT vào hàng hoá, như tủ lạnh thông minh, tivi thông minh, nồi cơm điện thông minh, khi đó chúng ta điều khiển một chiếc tivi bằng điều hướng bàn tay, giọng nói, rồi với những máy lạnh tự động điều chỉnh nhiệt độ theo thời tiết...

*Những ứng dụng CNTT và công nghệ IOT ở Việt Nam*

Ứng dụng CNTT và IOT quản lý sâm từ lúc trồng đến thu hoạch để từng sản phẩm có nguồn gốc rõ ràng là đề nghị của ông Hồ Quang Bửu - Chủ tịch UBND huyện Nam Trà My, Quảng Nam - "thủ phủ" của sâm Ngọc Linh.

Tháng 11/2015, Ban Quản lý Khu Công nghệ cao TP.HCM tổ chức Hội nghị với chủ đề "Ứng dụng của Internet of Things (IOT) cho đô thị thông minh và chất lượng cuộc sống". Sự kiện này đã có các chuyên gia khoa học, doanh nhân, nhà quản lý cả trong và ngoài nước tham dự.

Những ứng dụng CNTT và công nghệ IOT ở Việt Nam đang còn rất khiêm tốn, IOT và CNTT đang là miền đất hứa ở Việt Nam hiện tại và trong tương lai gần, tín hiệu của nhà quản lý đã phát ra là chúng ta xây dựng thành phố, đô thị thông minh, công sở thông minh, trường học thông minh, bệnh viện thông minh, ngôi nhà thông minh... đã và đang chờ sự đóng góp của các nhà quản lý, các nhà hoạch định chiến lược, các nhà khoa học, và các nhà CNTT...

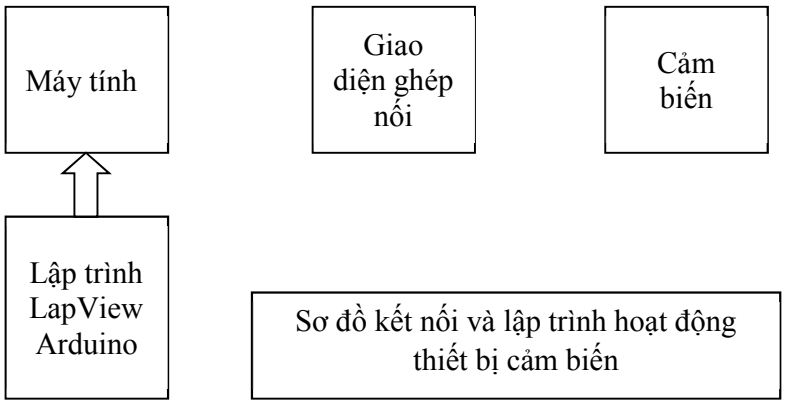
Vậy IOT hoạt động ra sao? Điều kỳ diệu ở đây chính là cảm biến. Các thiết bị cần kết nối phải được tích hợp một chip cảm biến để có thể chuyển đổi, phát hiện các hiện tượng trong môi trường tự nhiên và biến nó thành dữ liệu trong môi trường Intrenet. Thí dụ hệ thống tưới cây tự động của chúng ta gắn 1 bộ cảm biến dùng để nhận biết các yếu tố như: lượng nước, độ ẩm, thời tiết... Sau đó được chuyển thành dữ liệu và các dữ liệu này được sử dụng và được thiết lập các chế độ theo mục đích sử dụng, quy trình này sẽ kết nối và hoạt động trong môi trường Internet để thông báo và tạo giao diện đến người dùng.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Cảm biến với sự phát triển của hệ thống IOT

Cảm biến đã nổi lên như một trình điều khiển rất quan trọng đối với sự phát triển của hệ thống IOT. Cảm biến đã làm cho nó có thể để theo dõi chuyển động, môi trường và các thông số khác từ xa và chuyển giao cho các hệ thống điều khiển hoặc cổng thông qua công nghệ không dây. Nó đã làm thay đổi cuộc sống của con người và thực hiện các thiết bị hiện đại.

Thiết bị cảm ứng sẽ kết nối với máy tính qua card kết nối giữa máy tính với thiết bị cảm ứng, cài đặt driver và tiến hành sử dụng Labview lập trình thu thập xử lý dữ liệu từ thiết bị cảm ứng.

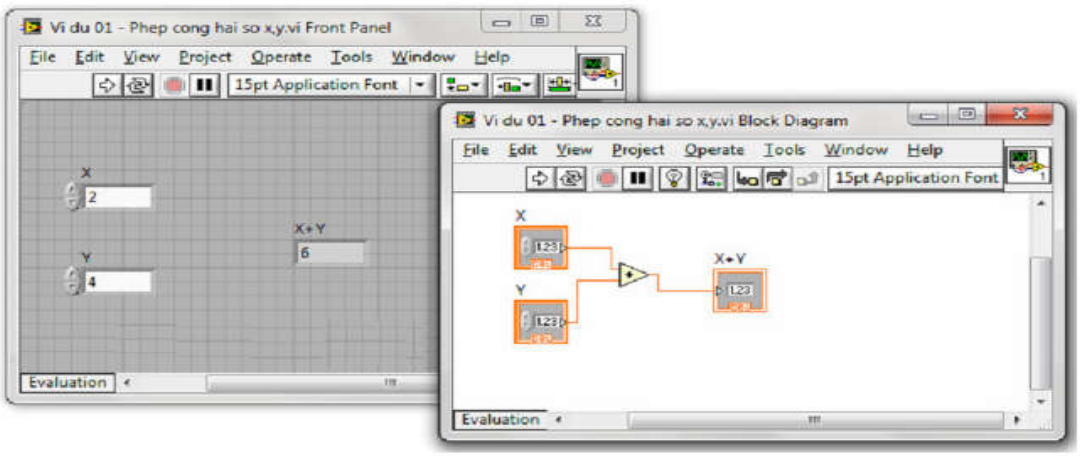



**Hình 2. Mô hình kết nối cảm biến với máy tính**

Arduino là một board mạch vi xử lý, nhằm xây dựng các ứng dụng tương tác với nhau hoặc với môi trường được thuận lợi hơn. Phần cứng bao gồm một board mạch nguồn mở được thiết kế trên nền tảng vi xử lý AVR Atmel 8bit, hoặc ARM Atmel 32-bit. Những Model hiện tại được trang bị gồm 1 cổng giao tiếp USB, 6 chân đầu vào analog, 14 chân I/O kỹ thuật số tương thích với nhiều board mở rộng khác nhau.

Được giới thiệu vào năm 2005, những nhà thiết kế của Arduino cố gắng mang đến một phương thức dễ dàng, không tốn kém cho những người yêu thích, sinh viên và giới chuyên nghiệp để tạo ra những thiết bị có khả năng tương tác với môi trường thông qua các cảm biến và các cơ cấu chấp hành.

Các board Arduino có thể được đặt hàng ở dạng được lắp sẵn hoặc dưới dạng các kí tự làm lấy. Thông tin thiết kế phần cứng được cung cấp công khai để những ai muốn tự làm một mạch Arduino bằng tay có thể tự mình thực hiện được (mã nguồn mở). Người ta ước tính khoảng giữa năm 2011 có trên 300 ngàn mạch Arduino chính thức đã được sản xuất thương mại, và vào năm 2013 có khoảng 700 ngàn mạch chính thức đã được đưa tới tay người dùng.




**Hình 3. Giao diện màn hình lập trình Labview**

Labview (viết tắt của nhóm từ Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench) là một phần mềm máy tính được phát triển bởi công ty National Instruments, Hoa Kỳ. Labview còn được biết đến như là một ngôn ngữ lập trình với khái niệm hoàn toàn khác so với các ngôn ngữ lập trình truyền thống như ngôn ngữ C, Pascal. Bằng cách diễn đạt cú pháp thông qua các hình ảnh trực quan trong môi trường soạn thảo, Labview đã được gọi với tên khác là lập trình G (viết tắt của Graphical, nghĩa là đồ họa).

Labview được dùng nhiều trong các phòng thí nghiệm, lĩnh vực khoa học kỹ thuật như tự động hóa, điều khiển, điện tử, cơ điện tử, hàng không, hóa sinh, điện tử y sinh,... Hiện tại ngoài phiên bản Labview cho các hệ điều hành Windows, Linux, Hãng NI đã phát triển các mô-đun Labview cho máy hỗ trợ cá nhân (PDA). Các chức năng chính của Labview có thể tóm tắt như sau:

Thu thập tín hiệu từ các thiết bị bên ngoài như cảm biến nhiệt độ, hình ảnh từ webcam, vận tốc của động cơ,...

Giao tiếp với các thiết bị ngoại vi thông qua nhiều chuẩn giao tiếp thông qua các cổng giao tiếp: RS232, RS485, USB, PCI, Ethernet.

Mô phỏng và xử lý các tín hiệu thu nhận được để phục vụ các mục đích nghiên cứu hay mục đích của hệ thống mà người lập trình mong muốn.

Xây dựng các giao diện người dùng một cách nhanh chóng và thẩm mỹ hơn nhiều so với các ngôn ngữ khác như Visual Basic, Matlab...

Cho phép thực hiện các thuật toán điều khiển như PID, Logic mờ (Fuzzy Logic), một cách nhanh chóng thông qua các chức năng tích hợp sẵn trong Labview.

Cho phép kết hợp với nhiều ngôn ngữ lập trình truyền thống như C, C++,...

### 2.2. Cấu trúc của một cảm biến

Cảm biến là thiết bị điện tử cảm nhận những trạng thái hay quá trình vật lý hay hóa học ở môi trường cần khảo sát, và biến đổi thành tín hiệu điện để thu thập thông tin về trạng thái hay quá trình đó.

Thông tin được xử lý để rút ra tham số định tính hoặc định lượng của môi trường, phục vụ các nhu cầu nghiên cứu khoa học kỹ thuật hay dân sinh và gọi ngắn gọn là đo đạc, phục vụ trong truyền và xử lý thông tin, hay trong điều khiển các quá trình khác.

Cảm biến thường được đặt trong các vỏ bảo vệ tạo thành đầu thu hay đầu dò (Test probe), có thể có kèm các mạch điện hỗ trợ, và nhiều khi trọn bộ đó lại được gọi luôn là "cảm biến". Tuy nhiên trong nhiều văn liệu thì thuật ngữ cảm biến ít dùng cho vật có kích thước lớn. Thuật ngữ này cũng không dùng cho một số loại chi tiết, như cái núm của công tắc bật đèn khi mở tủ lạnh, dù rằng về mặt hàn lâm núm này làm việc như một cảm biến.

### 2.3. Sự tương tác của cảm biến đơn lẻ, cách tổ chức lưu trữ và khai thác dữ liệu của các cảm biến trong mạng vạn vật

Các thiết bị cần kết nối được tích hợp một chip cảm biến để có thể chuyển đổi, phát hiện các hiện tượng trong môi trường tự nhiên và biến nó thành dữ liệu trong môi trường

Intenet of things - Mạng vạn vật để xử lý dữ liệu và tiến hành thực thi các điều hướng trong mạng vạn vật theo cách mà người dùng mong muốn.

Thí dụ: Hệ thống tưới cây tự động, chúng ta cần gắn 1 bộ cảm biến đơn lẻ dùng để nhận biết các yếu tố về nhiệt độ, lượng nước, độ ẩm, thời tiết... Sau đó được chuyển thành dữ liệu và các dữ liệu này được sử dụng và được thiết lập các chế độ theo mục đích của người dùng. Quy trình này kết nối và hoạt động trong mạng vạn vật - IOT để thông báo và tạo giao diện đến người dùng.

## 3. KẾT LUẬN

Thiết bị cảm biến và cảm biến thông minh ngày càng đa dạng, cùng với công cụ ngôn ngữ lập trình Labview, Ardunio đã và đang tạo ra sự phát triển đột phá của Internet Of things, là cơ hội cho nhà IT thoả sức sáng tạo lập trình điều điều khiển các thiết bị thông minh phục vụ cuộc sống con người, sống trong thành phố thông minh, Giao thông thông minh, ngôi nhà thông minh đi kèm các thiết bị thông minh…

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Bá Hải, (2013), *Lập trình LabView*, Nxb. Đại học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh.
[2] Lê Cảnh Trung, Phạm Quang Huy, (2016), *Lập trình điều khiển với ARDUINO*, Nxb. Khoa học Kỹ thuật, Hà Nội.
[3] https://vi.wikipedia.org/wiki/
[4] http://Arduino.vn
[5] http://www.ni.com/labview/
[6] http://www.esmart.com.vn/

# THE ROLE OF THE INTERNET OF THINGS

**Le Van Quang**

## ABSTRACT

*According to Gartner's market research statistics, in 2017, companies are expected to spend $ 3.5 trillion on information technology, which will focus on software and instead of hardware. In particular, the Internet of things (IOT) will be a global trend. Not out of this trend, Vietnam is also rapidly preparing for the explosion of things connected through the Internet. The article had shown the paring model sensors with the computer, used programming language of sensor control software.*

**Keywords:** *Internet of things, sensor, paring model.*

# ẢNH HƯỞNG CỦA KÍCH CỠ CỐT LIỆU VÀ HÀM LƯỢNG NƯỚC ĐẾN CƯỜNG ĐỘ NÉN VÀ ĐỘ LƯU ĐỘNG CỦA BÊ TÔNG

**Lê Thị Thanh Tâm[1], Mai Thị Ngọc Hằng[2], Mai Thị Hồng[3], Nguyễn Thị Mùi[4]**

TÓM TẮT

*Bài báo nghiên cứu sự ảnh hưởng của kích cỡ cốt liệu và hàm lượng nước đến cường độ nén và độ lưu động của bê tông. Thí nghiệm với hỗn hợp ba mẫu bê tông được thiết kế với kích cỡ cốt liệu và hàm lượng nước khác nhau. Kết quả thí nghiệm cho thấy, cường độ nén của bê tông giảm và độ lưu động của bê tông tăng khi sử dụng cốt liệu có kích cỡ lớn. Hàm lượng nước cao là nguyên nhân gây ra cường độ nén ban đầu cao nhưng cường độ lâu dài thấp.*

**Từ khóa:** *Bê tông, cường độ nén, độ lưu động, kích cỡ cốt liệu, hàm lượng nước.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bê tông là vật liệu phổ biến sử dụng trong các công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp, giao thông, và thủy lợi. Các thành phần cơ bản tạo nên bê tông bao gồm: xi măng, cát, đá, và nước. Ngoài ra, tùy thuộc vào yêu cầu của từng công trình, điều kiện làm việc và yêu cầu về kết cấu mà có thể thêm các phụ gia để tăng cường một số đặc tính của bê tông. Do vậy, với bê tông thường, các đặc tính của nó phụ thuộc nhiều vào hàm lượng và chất lượng của các vật liệu chế tạo bê tông.

Có nhiều yếu tố ảnh hưởng đến cường độ nén và độ lưu động của bê tông (độ sụt), ví dụ như: tỷ lệ các thành phần cấu tạo, phương pháp trộn, điều kiện bảo dưỡng, loại cốt liệu, hình dạng cốt liệu và chất lượng của các vật liệu chế tạo bê tông… Trong các yếu tố trên, mối quan hệ giữa kích cỡ cốt liệu thô (đá, sỏi) với cường độ nén và độ lưu động của bê tông nhận được sự quan tâm từ một số nhà nghiên cứu trên thế giới [9,10,12-15]. Đa phần các nghiên cứu đều kết luận rằng khi kích cỡ cốt liệu tăng, cường độ chịu nén của bê tông giảm. Tuy nhiên, theo kết quả nghiên cứu của Kozul và Darwin (1997) [6], sự thay đổi kích cỡ cốt liệu không ảnh hưởng nhiều đến cường độ chịu nén của bê tông. Kết quả nghiên cứu còn cho thấy, với bê tông thường sử dụng cốt liệu có đường kính hạt lớn nhất 19mm có cường độ chịu nén lớn hơn 7,6% so với bê tông tương ứng sử dụng cốt liệu có đường kính hạt lớn nhất 16mm. Điều này ngược lại với các nghiên cứu [9,10,12-15]. Theo nghiên cứu của Woode cùng các cộng sự [13], khi kích cỡ cốt liệu giảm thì độ lưu động của bê tông giảm. Điều này ngược lại với nghiên cứu của Rathish và Krishna [10], khi kích cỡ cốt liệu giảm thì độ lưu động của bê tông tăng.

Hàm lượng nước cũng là một yếu tố ảnh hưởng đến cường độ nén và độ lưu động của bê tông. Lượng nước phải cung cấp đủ để bê tông đạt độ lưu động trong thi công (tính dễ thi công), đồng thời đủ cho các phản ứng thủy hóa của xi măng [8]. Nếu hàm lượng nước ít, bê

[1,2,3,4] *Giảng viên khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức*

tông có cường độ nén cao nhưng độ lưu động thấp, khó thi công. Ngược lại, nếu hàm lượng nước nhiều, tính dễ thi công cao, nhưng chất lượng bê tông giảm [3,8]. Hàm lượng nước sử dụng trong bê tông có mối liên hệ mật thiết với kích cỡ hạt và độ sụt yêu cầu. Chính vì vậy, theo tiêu chuẩn thiết kế thành phần bê tông của Hoa Kỳ (ACI 211.1-91) [2], khi chọn lượng nước cho bê tông phải dựa vào yêu cầu thi công (độ sụt) và kích cỡ cốt liệu (đường kính cốt liệu lớn nhất).

Các nghiên cứu về sự ảnh hưởng của kích cỡ cốt liệu lên cường độ chịu nén và độ lưu động của bê tông còn ít, các kết quả còn chưa thống nhất bởi vì hàm lượng và tính chất các thành phần cấu tạo của bê tông khác nhau trong mỗi đề tài nghiên cứu. Ở Việt Nam, sự ảnh hưởng này chưa nhận được nhiều sự quan tâm từ các nhà nghiên cứu. Bài báo này nghiên cứu sự ảnh hưởng của kích cỡ cốt liệu lên cường độ chịu nén và độ lưu động của bê tông, và ảnh hưởng của hàm lượng nước lên cường độ chịu nén của bê tông.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Thực nghiệm

#### *2.1.1. Vật liệu*

##### *2.1.1.1. Đá dăm*

Đá là cốt liệu thô được sử dụng để tạo ra bộ khung chịu lực cho bê tông. Đá sử dụng trong nghiên cứu này là đá dăm, có nguồn gốc tự nhiên và được lấy ở mỏ Vức - Thanh Hóa, độ ẩm 0,05%, độ hút nước 0,68%, khối lượng riêng 2,69 tấn/$m^3$ và khối lượng thể tích ở trạng thái khô là 1,408 tấn/$m^3$. Sử dụng hai loại đá dăm có đường kính hạt lớn nhất $D_{max}$=25mm và $D_{max}$=15mm để nghiên cứu sự ảnh hưởng của kích cỡ cốt liệu lên cường độ chịu nén và độ lưu động của bê tông.

##### *2.1.1.2. Cát*

Cát là vật liệu dạng hạt nhỏ và mịn, có nguồn gốc tự nhiên được lấy từ sông Chu - Thọ Xuân - Thanh Hóa, giá thành rẻ, thành phần chủ yếu là silic oxit ($SiO_2$). Cát được sử dụng để làm cốt liệu nhỏ cùng với xi măng, nước tạo ra vữa xi măng để lấp đầy lỗ rỗng giữa các hạt cốt liệu lớn (đá, sỏi) và bao bọc xung quanh các hạt cốt liệu lớn tạo ra khối bê tông đặc chắc. Cát sử dụng trong nghiên cứu là cát vàng, có độ ẩm 5,65%, độ hút nước 0,28%, mô đun độ lớn $M_k$ = 2,67, khối lượng riêng 2,62 tấn/$m^3$, và khối lượng thể tích ở trạng thái khô là 1,433 tấn/$m^3$.

##### *2.1.1.3. Xi măng*

Xi măng là chất kết dính thủy lực trong quá trình thủy hóa của bê tông. Xi măng sử dụng trong nghiên cứu này là xi măng Nghi Sơn dân dụng PCB40, có khối lượng riêng là 3,12 tấn/$m^3$.

##### *2.1.1.4. Phụ gia*

Phụ gia là chất được bổ sung vào bê tông bên cạnh nước, xi măng và cốt liệu để cải thiện tính chất và khả năng làm việc của bê tông, đẩy nhanh quá trình đông kết, khô cứng.

Mỗi loại phụ gia có tác dụng khác nhau tùy vào yêu cầu sử dụng. Trong nghiên cứu này sử dụng phụ gia hóa dẻo sikament R7 để giảm lượng nước cho bê tông. Phụ gia sử dụng có khối lượng riêng là 1,15 tấn/$m^3$.

*2.1.2. Thiết kế thành phần bê tông*

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp thiết kế thành phần cấp phối bê tông theo tiêu chuẩn ACI-211.1-91 [2]. Ba hỗn hợp bê tông có thành phần như bảng 1, với cùng tỷ lệ nước-xi măng là 0,40. Hỗn hợp bê tông M1 sử dụng cốt liệu có đường kính hạt lớn nhất là 25mm. Hỗn hợp bê tông M2 và M3 sử dụng cốt liệu có đường kính hạt lớn nhất là 15mm. Mục đích thiết kế hỗn hợp bê tông M1 và M2 để đánh giá sự ảnh hưởng của đường kính cốt liệu lên cường độ chịu nén và độ lưu động của bê tông. Hỗn hợp bê tông M2 và M3 cùng sử dụng cốt liệu có đường kính hạt lớn nhất là 15mm, nhưng có hàm lượng nước và phụ gia khác nhau. Hỗn hợp M3 có hàm lượng nước nhiều hơn, và sử dụng ít phụ gia hóa dẻo hơn hỗn hợp M2. So sánh hỗn hợp M2 và M3 để đánh giá sự ảnh hưởng của hàm lượng nước lên cường độ nén của bê tông, và ảnh hưởng của phụ gia hóa dẻo lên độ lưu động của bê tông tươi.

**Bảng 1. Thành phần bê tông thiết kế**

| Hỗn hợp bê tông | Tỷ lệ N/X | Xi măng (kg) | Cát (kg) | Đá (kg) | Nước (kg) | Phụ gia (kg) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M1 (Dmax =25 mm) | 0,40 | 457 | 841 | 962 | 175 | 7,5 |
| M2 (Dmax =15 mm) | | 457 | 841 | 962 | 175 | 7,5 |
| M3 (Dmax =15 mm) | | 550 | 659 | 962 | 218 | 2 |

*2.1.3. Phương pháp thí nghiệm*

Tất cả các thí nghiệm trong bài báo này được thực hiện tại xưởng thực hành khoa Kỹ thuật Công nghệ, Trường Đại học Hồng Đức.

*2.1.3.1. Trộn bê tông*

Trong nghiên cứu này sử dụng máy trộn bê tông dung tích 450 lít như hình 1(a). Sau khi trộn xong, hỗn hợp bê tông được đổ ra khay như hình 1(b) để kiểm tra độ sụt.

(a)

(b)

**Hình 1. a) Máy trộn; b) Hỗn hợp bê tông sau khi trộn**

*2.1.3.2. Đo độ sụt*

Độ sụt hay độ lưu động của vữa bê tông, dùng để đánh giá khả năng dễ chảy của hỗn hợp bê tông dưới tác dụng của trọng lượng bản thân hoặc rung động. Độ sụt được xác định theo TCVN 3105-93 [1] hoặc ASTM C143 [4]. Dụng cụ đo là hình nón cụt Abrams, gọi là côn Abrams, có kích thước 203×102×305mm, đáy và miệng hở. Que đầm hình tròn có đường kính bằng 16mm, dài 600mm. Cho hỗn hợp bê tông vào hình nón cụt thành ba lần, mỗi lần 1/3 thể tích hình nón và đầm chặt 25 lần. Sau đó gạt bỏ phần bê tông thừa trên đỉnh nón, từ từ nâng hình nón theo phương thẳng đứng để hỗn hợp bê tông sụt xuống. Độ sụt bằng 305mm trừ đi chiều cao của bê tông tươi. Hình 2 thể hiện độ sụt của bê tông sau khi tháo hình nón cụt.

**Hình 2. Độ sụt của bê tông sau khi tháo hình nón cụt**

*2.1.3.3. Đúc mẫu*

Khuôn đúc mẫu thí nghiệm có hình trụ tròn đường kính 10cm, cao 20cm. Với mỗi hỗn hợp bê tông được thiết kế như trên, sau khi kiểm tra độ sụt, tiến hành đổ bê tông vào khuôn thành ba lớp, mỗi lớp đầm 25 lượt. Sau khi đầm xong lớp cuối cùng thì gạt bằng đến miệng khuôn đúc và làm phẳng bề mặt mẫu như hình 3.

**Hình 3. Mẫu bê tông vừa đúc xong**

*2.1.3.4. Bảo dưỡng mẫu*

Bảo dưỡng mẫu bê tông nhằm cung cấp nước đầy đủ trong suốt quá trình diễn ra các phản ứng thủy hóa của xi măng. Sau khi đúc mẫu được một ngày, bê tông hóa cứng thì tháo khuôn, đem cân khối lượng từng mẫu và ngâm vào bể nước để bảo dưỡng. Hình 4 thể hiện các mẫu bê tông sau khi tháo khuôn và bảo dưỡng trong bể nước.

a)

b)

**Hình 4. a) Mẫu bê tông sau khi tháo khuôn; b) Bảo dưỡng mẫu bê tông**

*2.1.3.5. Nén mẫu*

Mẫu bê tông sau khi bảo dưỡng sẽ được đem đi nén để kiểm tra cường độ. Trong nghiên cứu này sử dụng máy nén bê tông Controls 300 tấn để xác định cường độ nén của mẫu (Hình 5). Cường độ nén của mẫu bằng lực nén lớn nhất chia cho diện tích bề mặt mẫu. Các mẫu được nén sau 3, 7, 14 và 28 ngày bảo dưỡng. Mỗi lần thí nghiệm với 3 mẫu thử, lấy giá trị trung bình.

**Hình 5. Thí nghiệm nén mẫu bê tông**

## 2.2. Kết quả và thảo luận

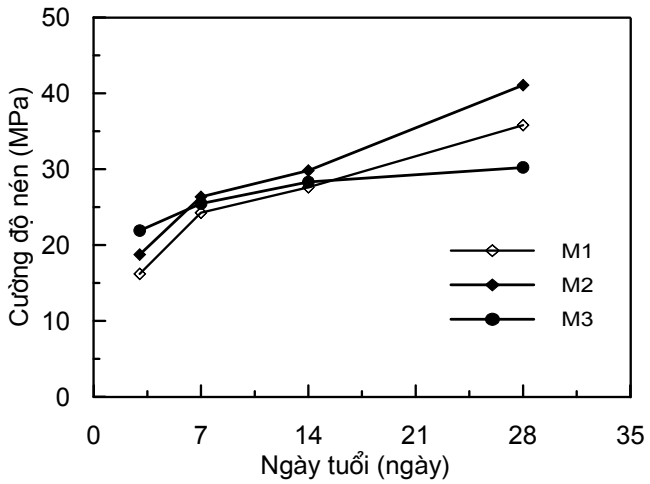
*2.2.1. Đặc tính của bê tông tươi*

Đặc tính bê tông tươi của các hỗn hợp được thể hiện ở bảng 2. Khối lượng trung bình các mẫu xấp xỉ nhau, sai khác lớn nhất là 3%. Hỗn hợp M1 có độ sụt lớn hơn mẫu M2, có nghĩa là đường kính cốt liệu lớn thì độ lưu động của bê tông cao. Điều này được giải thích bởi Shetty (2000) [11] theo đó, do tổng diện tích bề mặt của các hạt cốt liệu lớn nhỏ hơn tổng diện tích bề mặt của các hạt cốt liệu nhỏ dẫn đến lượng nước trên bề mặt hạt cốt liệu lớn nhiều hơn trên bề mặt các hạt cốt liệu nhỏ (với cùng hàm lượng nước như nhau). Vì vậy độ sụt của hỗn hợp M1 sử dụng cốt liệu $D_{max}$=25mm lớn hơn độ sụt của hỗn hợp M2 sử dụng cốt liệu $D_{max}$=15mm. Hỗn hợp M2 có độ sụt lớn hơn rất nhiều so với hỗn hợp M3. Kết quả này do việc sử dụng hàm lượng phụ gia hóa dẻo ở hỗn hợp M2 nhiều hơn so với hỗn hợp M3. Chú ý rằng cả ba hỗn hợp thiết kế có cùng tỷ lệ nước-xi măng là 0,40.

**Bảng 2. Đặc tính của các hỗn hợp bê tông tươi**

| Hỗn hợp | Độ sụt (cm) | Khối lượng mẫu trung bình (g) |
|---|---|---|
| M1 ($D_{max}$ =25 mm) | 20 | 4063 |
| M2 ($D_{max}$ =15 mm) | 18 | 3962 |
| M3 ($D_{max}$ =15 mm) | 8 | 3934 |

*2.2.2. Cường độ nén*




**Hình 6. Sự phát triển cường độ của mẫu bê tông**

Hình 6 thể hiện sự phát triển cường độ nén của mẫu bê tông theo thời gian. Hình 7 thể hiện các mẫu bê tông sau khi thí nghiệm bị nén vỡ. Cường độ nén của hỗn hợp M2 lớn hơn cường độ nén của hỗn hợp M1. Kết quả này đồng thuận với các nghiên cứu trước [9,10,12-15]; kích cỡ cốt liệu càng cao thì cường độ chịu nén càng giảm. Đường kính cốt liệu lớn dễ tạo nên các lỗ rỗng bên trong và nước sẽ bị giữ lại tại đây. Lâu ngày nước bay hơi tạo nên các lỗ rỗng trong bê tông. Mặt khác, lượng nước nhiều trên bề mặt của các hạt cốt liệu lớn sẽ làm giảm lực bám dính giữa đá và vữa xi măng. Khi chịu lực, vùng liên kết yếu này dễ bị phá hoại. Ngược lại, với hỗn hợp bê tông sử dụng đường kính cốt liệu nhỏ hơn, diện tích bề mặt cao hơn, lượng nước trên bề mặt ít hơn, dẫn đến lực bám dính giữa vữa xi măng và cốt liệu tốt hơn, do vậy cường độ chịu nén tốt hơn.

a) b) c)

**Hình 7. Các mẫu vỡ sau khi thí nghiệm: a) Mẫu M1; b) Mẫu M2; c) Mẫu M3**

Hỗn hợp M3 sử dụng cốt liệu như hỗn hợp M2 ($D_{max}$=15mm), tuy nhiên cường độ nén tại 28 ngày thấp nhất trong cả ba hỗn hợp. Nguyên nhân là do hỗn hợp M3 có hàm lượng nước tương đối cao (218kg) so với hai hỗn hợp còn lại (175kg), mặc dù tỷ lệ nước-xi măng là như nhau (N/X=0,40). Điều này được giải thích bởi các nghiên cứu [3,5,7,8], khi hàm lượng nước cao, với cùng một tỷ lệ nước-xi măng, dẫn tới hàm lượng xi măng cao. Lượng nước cao là nguyên nhân để lại các lỗ rỗng bên trong bê tông khi nước bốc hơi. Lượng xi măng cao là nguyên nhân gây biến dạng co ngót của bê tông khi thủy hóa. Hàm lượng nước và xi măng cao đều là nguyên nhân làm giảm chất lượng bê tông. Ở 3 ngày tuổi, hỗn hợp M3 có cường độ nén cao nhất, do hàm lượng nước và xi măng ở hỗn hợp này cao nên tốc độ thủy hóa ban đầu nhanh, làm tăng nhanh cường độ chịu nén của bê tông ở giai đoạn đầu. Tuy nhiên, về lâu dài, khi ngày tuổi càng cao thì lượng nước và xi măng cao lại là nguyên nhân làm giảm chất lượng bê tông như đã phân tích ở trên. Do vậy cường độ nén của hỗn hợp M3 kém nhất trong ba hỗn hợp tại 28 ngày tuổi.

## 3. KẾT LUẬN

Ảnh hưởng của kích cỡ cốt liệu và hàm lượng nước đến cường độ nén và độ lưu động của bê tông đã được nghiên cứu, kết quả cho thấy :

Độ lưu động của hỗn hợp bê tông sử dụng cốt liệu có kích cỡ lớn cao hơn độ lưu động của hỗn hợp bê tông sử dụng cốt liệu có kích cỡ nhỏ. Sử dụng phụ gia hóa dẻo làm tăng đáng kể độ lưu động của bê tông.

Cường độ chịu nén của bê tông sử dụng cốt liệu có kích cỡ lớn thấp hơn cường độ chịu nén của bê tông sử dụng cốt liệu có kích cỡ nhỏ.

Hàm lượng nước và xi măng ảnh hưởng lớn đến cường độ sớm và cường độ lâu dài của bê tông. Đó là nguyên nhân gây ra cường độ sớm cao nhưng cường độ lâu dài thấp.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] TCVN 3105 (1993), *Hỗn hợp bê tông nặng và bê tông nặng - Lấy mẫu chế tạo và bảo dưỡng mẫu thử.*

[2] ACI 211.1 (1991), *Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete*, American Concrete Institute, 38 pp.

[3] Aitcin, P., Neville, A. M., and Acker, P. (1997), *Integrated View of Shrinkage Deformation,* Concrete International, 19 (9), pp. 35-47.

[4] ASTM C143, *Standard Test Method for Slump of Hydraulic-Cement Concrete*.

[5] Hwang, C. L., and Hung, M. F. (2002), *Comparison of ACI Mixture Design Algorithm to HPC Densified Mixture Design Algorithm in the Anti-Corrosion and Durability Design*, Journal of Chinese Corrosion Engineering, 16 (4), pp. 281-296.

[6] Kozul, R., and Darwin, D. (1997), *Effects of Aggregate Type, Size, and Content on Concrete Strength and Fracture Energy*, Report No. 43, University of Kansas Center for Research, 98 pp.

[7] Mather, B. (2000), *Use Less Cement*, Concrete International, 22 (11), pp. 55-56.

[8] Neville, A. (2000), *Water and Concrete: a Love-Hate Relationship*, Concrete International, 22 (12), pp. 34-38.

[9] Oyewole, O.O., Arilewola, S.S., Jimoh A.A., and Oyejobi, D.O. (2011), *Effects of Aggregate Sizes on the Physical and Mechanical Properties of Concrete Using Artificial Aggregates*, Proceedings of Civil2011@unilorin 3rd Annual Conference of Civil Engineering, pp. 21-23.

[10] thish, K.R., and Krishna, R.M.V. (2012), *A Study on the Effect of Size of Aggregate on the Strength and Sorptivity Characteristics of Cinder Based Light Weight Concrete*, Research Journal of Engineering Sciences, 1(6), pp. 27-35.

[11] Shetty, M.S. (2000), *Concrete technology theory and practice*, Pub. by S.Chand and company Ltd New Delhi.

[12] Su, R.K.L., and Cheng, B. (2008), *The Effect of Coarse Aggregate Size on the Stress-strain Curves of Concrete under Uniaxial Compression*, Transactions of Hong Kong Institution of Engineers, 15(3), pp. 33-39.

[13] Woode, A., Amoah, D.K., Aguba, I.A., and Ballow, P. (2015), *The Effect of Maximum Coarse Aggregate Size on the Compressive Strength of Concrete Produced in Ghana*, Civil and Environmental Research, 7 (5), pp. 7-12.

[14] Xie, W., Jin, Y., and Li, S. (2012), *Experimental Research on the Influence of Grain Size of Coarse aggregate on Pebble Concrete Compressive Strength*, Applied mechanics and Materials, 238, pp. 133-137.

[15] Yaqub, M., and Bukhari, I. (2006), *Effect of Size of Coarse Aggregate on Compressive Strength of High Strength Concrete*, 31st Conference on Our World in Concrete&Structures, Singapore.

# THE EFFECTS OF COARSE AGGREGATE SIZE AND WATER CONTENT ON THE COMPRESSIVE STRENGTH AND SLUMP OF NORMAL CONCRETE

**Le Thi Thanh Tam, Mai Thi Ngoc Hang, Mai Thi Hong, Nguyen Thi Mui**

ABSTRACT

*Normal concrete is a popular construction material, its compressive strength impacts on load capacity and cost of the project, while its slump affects construction possibility. This paper investigates the effect of coarse aggregate size and water content on the compressive strength and slump of normal concrete. Three concrete mixtures are designed with different coarse aggregate size and water content. Test result indicates that the compressive strength of concrete reduces and the slump of concrete increases when using larger coarse aggregate size. High water content is the cause of high compressive strength at early stage but low compressive strength at high stage.*

**Keywords:** *Concrete, compressive strength, slump, coarse aggregate size, water content.*

# TOÁN TỬ BAN ĐẦU VÀ KHAI TRIỂN TAYLOR-GONTCHAROV

**Hoàng Văn Thi[1], Nguyễn Tiến Đà[2]**

TÓM TẮT

*Trong bài báo này chúng tôi trình bày một số tính chất quan trọng của toán tử khả nghịch phải và ứng dụng của công thức khai triển Taylor-Gontcharov vào việc khôi phục hàm số khi biết các dữ liệu ban đầu thông qua các đạo hàm cấp k, nó được xem như một sự mở rộng của công thức khai triển Taylor.*

**Từ khóa:** *Toán tử khả nghịch phải, khai triển Taylor-Goncharov, lý thuyết toán tử.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết toán tử là một trong những lĩnh vực quan trọng có nhiều ảnh hưởng trong lịch sử phát triển của toán học hiện đại nói chung và giải tích hiện đại nói riêng. Lý thuyết toán tử đã sớm xuất hiện và phát triển mạnh mẽ trên thế giới vào những năm 1920 đến năm 1970 với sự bành trướng của lý thuyết các tích phân kỳ dị và các bài toán bờ Riemannn của hàm giải tích biến phức, một lĩnh vực đã gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà toán học nổi tiếng trên thế giới như Noether, Gakhov, VeKua...

Một trong những lớp toán tử có vai trò quan trọng và được nhắc lại khá nhiều trong lý thuyết toán tử là toán tử khả nghịch phải, với những toán tử này ta không thể bỏ qua toán tử ban đầu của nó được ví như là một chiếc xương sống với những tính chất đặc biệt, với những tính chất này người ta đã đưa ra dạng tổng quát của công thức khai triển Taylor - Gontcharov. Với mục đích đưa tới cho người đọc có một cách nhìn cụ thể và tường minh về tính chất của toán tử ban đầu cũng như thấy được mối quan hệ hữu cơ giữa công thức khai triển Taylor trên phương diện và nền tảng là giải tích cổ điển với công thức khai triển Taylor - Gontcharov dưới góc nhìn và quan điểm của "phạm trù" toán tử, vì vậy trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày một số nghiên cứu của mình về "Toán tử ban đầu và công thức khai triển Taylor - Gontcharov".

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Toán tử khả nghịch

Cho $\Gamma$ là một đại số có đơn vị ( ví dụ trường số thực hoặc phức, tập hợp các ma trận cùng cấp , vành các đa thức).

Đặt $L_0(X) = \{A : X \to X\}$ trong đó $A$ là toán tử tuyến tính và $domA = X$ , *X là một không gian véctơ tùy ý.*

[1] *Sở Giáo dục và Đào tạo, tỉnh Thanh Hóa*
[2] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

***Định nghĩa 1.*** *$A \in \Gamma$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại toán tử $B$ sao cho $AB = BA = I$. Nếu $\Gamma$ là đại số các ma trận vuông cấp $n$ thì $A \in \Gamma$ được gọi là khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.*

***Định nghĩa 2.*** *Toán tử $A$ được gọi là khả nghịch phải nếu tồn tại toán tử $B$ sao cho $AB = I$ và $BA \neq I$.*

*Ví dụ 1.* Giả sử $\Gamma$ là tập hợp các hàm thực khả vi cấp 1. Khi đó toán tử đạo hàm và toán tử nguyên hàm lần lượt xác định bởi

$$Dx(t) = x'(t); \quad Rx(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds$$

Ta có $DRx(t) = D(Rx(t)) = \left( \int_{t_0}^{t} x(s)ds \right)' = x(t)$ với mọi $x \in \Gamma$ hay $DR = I$.

Mặt khác, $RDx(t) = R(Dx(t)) = \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = x(t) - x(t_0) \neq x(t)$ nếu $x(t_0) \neq 0$ nghĩa là $RD \neq I$, vậy $D$ là toán tử khả nghịch phải, lúc này $R$ được gọi là toán tử nghịch đảo phải của $D$.

Tập hợp tất cả các toán tử khả nghịch phải được kí hiệu là $R(X)$, tập hợp tất cả các nghịch đảo phải của $D \in R(X)$ là $\Re_D$. Tương tự ta có toán tử $A$ được gọi là khả nghịch trái nếu tồn tại toán tử $B$ sao cho $BA = I$ và $AB \neq I$.

***Định nghĩa 3.*** *$A \in \Gamma$ được gọi là khả nghịch suy rộng nếu tồn tại toán tử $B$ sao cho $A = ABA$.*

*Ví dụ 2.* Toán tử chiếu $P^2 = P$ là khả nghịch suy rộng.

*Nhận xét: i, O là toán tử khả nghịch suy rộng (O là toán tử không).*

*→ ii, Mọi toán tử khả nghịch, khả nghịch trái, khả nghịch phải đều là khả nghịch suy rộng nhưng điều ngược lại thì không đúng.*

***Bổ đề 1****. Giả sử $A, B$ là các toán tử, khi đó nếu $I + AB$ khả nghịch (tương ứng khả nghịch trái, khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng) thì $I + BA$ cũng khả nghịch (tương ứng cũng khả nghịch trái, khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng).*

### 2.2. Toán tử ban đầu và công thức khai triển Taylor-Gontcharov

*2.2.1. Toán tử ban đầu*

Xét bài toán: Cho $D$ là toán tử đạo hàm $(Dx)(t) = x'(t)$. Tìm tất cả các toán tử $R$ sao cho $DR = I$

Để giải quyết được bài toán này ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

**Bổ đề 1.1.** *Giả sử $R_0 \in \Re_D$ khi đó với mọi $R \in \Re_D$ có dạng $R = R_0 + (I - R_0 D)A$ với $A \in L_0(X)$.*

*Chứng minh.*

Chọn $A = R - R_0$ ta được

$R_0 + (I - R_0 D)A = R_0 + (I - R_0 D)(R - R_0) = R_0 + R - R_0 + R_0 DR_0 - R_0 DR = R$

do $DR = DR_0 = I$.

$(\Leftarrow)$ Với $R = R_0 + (I - R_0 D)A$ ta có $= DR_0 + DIA - DR_0 DA = DR_0 = I$ vậy ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ chúng ta trở về với ví dụ trên, trước hết ta thấy rằng nếu xem $R_0$ là toán tử nguyên hàm $R_0 x(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds$ thì ngay lập tức ta có $DR_0 = I$, như vậy áp dụng bổ đề trên ta có thể tìm được tất cả các nghịch đảo phải của $D$.

***Định nghĩa 4.*** *Toán tử $F = I - R_0 D$ được gọi là toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ ứng với $R \in \Re_D$ cho trước.*

Một định nghĩa tương đương có thể được phát biểu như sau: Toán tử $F \in L_0(X)$ được gọi là toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ ứng với nghịch đảo phải $R$ của $D$ nếu $F^2 = F$; $FX = KerD$ và $FR = O$

**Mệnh đề 1.** *Nếu toán tử $A \in L(X)$ là khả nghịch thì mọi toán tử ban đầu của nó là tầm thường*

*Chứng minh.*

*Giả sử $B \in L(X)$ là nghịch đảo hai phía của $A$ khi đó $F = I - BA = I - I = O$.*

**Mệnh đề 2.** *Ta đặt $\Re_D = \{R_i\}_{i \in I}$ và $F_D = \{F_i\}_{i \in I}$ tương ứng là họ các nghịch đảo phải và họ các toán tử ban đầu của $D$ khi đó:*

*i*, $F_i F_j = F_j$

*ii*, $F_j R_i = R_i - R_j$

*với mọi $i, j \in I$.*

*Chứng minh.*

Ta có $F_i = I - R_i D$ ; $F_j = I - R_j D$ .

Khi đó

$F_i F_j = (I - R_i D)(I - R_j D) = I - R_j D - R_i D + R_i DR_j D = I - R_j D - R_i D + R_i D = I - R_j D = F_j$

*ii*, $F_j R_i = (I - R_j D)R_i = R_i - R_j DR_i = R_i - R_j$ (đpcm)

**Hệ quả 1.** Với mọi $i, j \in I$ thì toán tử $F_j R_k - F_i R_k$ không phụ thuộc vào cách chọn toán tử $R_k \in \Re_D$.

*Chứng minh.*

Thật vậy theo mệnh đề trên thì $F_jR_k - F_iR_k = (R_k - R_j) - (R_k - R_i) = R_i - R_j$. Nhận xét rằng biểu thức $F_jR_k - F_iR_k$ không phụ thuộc vào chỉ số $k$ mà chỉ phụ thuộc vào $i, j$ và chúng được kí hiệu là $I_i^j$ gọi là toán tử tích phân xác định. Với mỗi $x \in X$ thì $I_i^j x$ được gọi là tích phân xác định của $x$.

**Mệnh đề 3.** Với mọi $x \in X$, $i, j \in I$ ta đều có $DI_i^j x = 0$

*Chứng minh.*

Thật vậy ta có $DI_i^j x = D(F_jR_k - F_iR_k)x = D(R_i - R_j)x = x - x = 0$

Hai tính chất hiển nhiên:

a) $I_i^j = -I_j^i$

b) $I_i^k + I_k^j = I_i^j$

**Mệnh đề 4.** *Với mọi $i, j \in I$ ta đều có $I_i^j D = F_j - F_i$*

Thật vậy $I_i^j D = F_jR_iD = F_j(I - F_i) = F_j - F_jF_i = F_j - F_i$

**Định lý 1.** *Giả sử $D \in R(X)$ và thỏa mãn $F^2 = F$. Khi đó $F$ là toán tử ban đầu của $D$ ứng với nghịch đảo phải $R = R_1 - FR_1$ ứng với mọi $R_1 \in \mathfrak{R}_D$ và $R$ xác định duy nhất độc lập với sự lựa chọn $R_1 \in R_D$*

*Chứng minh.*

Theo giả thiết thì $DF = O$ và $DR_1 = I$ nên $DR = D(R_1 - FR_1) = DR_1 - DFR_1 = I$

Vậy $R$ là nghịch đảo phải của $D$, mặt khác do $F^2 = F$ nên ta có

$$FR = F(R_1 - FR_1) = FR_1 - F^2R_1 = FR_1 - FR_1 = O,$$

vậy $F$ là toán tử ban đầu của $D$ ứng với $R$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh sự duy nhất của $R$ không phụ thuộc vào $R_1 \in \mathfrak{R}_D$. Giả sử ta cũng có $R_2 \in \mathfrak{R}_D$ và $R_2 \neq R_1$ xét $R_3 = R_2 - FR_2$ dễ thấy $R_3$ và $F$ lần lượt cũng là nghịch đảo phải và toán tử ban đầu của $D$ ứng với $R_2$, nghĩa là ta nhận được $F = I - R_2D$ trên $domD$.

Do đó

$$\begin{aligned} R_3 - R &= R_2 - FR_2 - (R_1 - FR_1) = (I - F)(R_2 - R_1) \\ &= R_2D(R_2 - R_1) = R_2DR_2 - R_2DR_1 = R_2 - R_2 = O, \end{aligned}$$

hay $R = R_3$ đây là điều phải chứng minh.

**Mệnh đề 5.** *Giả sử $D \in R(X)$ và $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}_D$ giao hoán với nhau. Khi đó $R_1 = R_2$*

**Mệnh đề 6.** *Giả sử $D \in R(X)$ và $F_1, F_2$ là các toán tử ban đầu của $D$ giao hoán với nhau, khi đó $F_1 = F_2$*

*Chứng minh*.

Thật vậy, theo giả thiết ta có $F_1 = I - R_1 D$ và $F_2 = I - R_2 D$ khi đó ta thu được:

$$F_1 F_2 = (I - R_1 D)(I - R_2 D) = I - R_2 D - R_1 D + R_1 D R_2 D = I - R_2 D - R_1 D + R_1 D = I - R_2 D = F_2$$

tương tự ta cũng có $F_2 F_1 = F_1$ nhưng do $F_1 F_2 = F_2 F_1$ nên $F_1 = F_2$.

**Mệnh đề 7.** Giả sử $D \in R(X)$ và $F_1, F_2$ là các toán tử ban đầu của $D$ ứng với $R_1, R_2 \in \Re_D$, khi đó $F_1 = F_2$ nếu và chỉ nếu $R_1 = R_2$.

*Chứng minh.*

$(\Leftarrow)$ Hiển nhiên theo định nghĩa ta có ngay nếu $R_1 = R_2$ thì $F_1 = F_2$

$(\Rightarrow)$ Giả sử rằng $F_1 = F_2$ khi đó do $F_1 R_1 = O$, ($O$ là toán tử không).

Nên: $R_2 = R_2 D R_1 = (I - F_2) R_1 = R_1 - F_2 R_1 = R_1 - F_1 R_1 = R_1$ . (đpcm)

**Định lý 2.** Giả thiết rằng $F_0, \ldots\ldots F_n$ là các toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ và giả sử không gian các hằng số là ổn định với bộ các $P_j \in L(X)$, $j = \overline{1,n}$, nghĩa là $P_j \ker D \subset \ker D$, *với mọi* $j = \overline{1,n}$. *Khi đó toán tử* $F = F_0 + \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j$ *là toán tử ban đầu của* $D$ *ứng với nghịch đảo phải* $R = R_0 - \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^{j-1}$.

*Chứng minh*.

Theo giả thiết thì $DP_j = O$ với mọi $j = \overline{1,n}$ . Vậy nên

$$DF = DF_0 + D\sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j = DF_0 + \sum_{j=1}^{n} DP_j F_j D^j = O$$

vậy $F : DomD \to KerD$, ta lại có

$$F^2 = \left( F_0 + \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j \right) F = F_0 F + \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j F = F_0 F = (I - R_0 D) F = F - R_0 D F = F$$

Với mọi $x \in KerD$ ta có $Fx = F_0 x + \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j x = F_0 x = x$ điều này nghĩa là $F$ là toán tử chiếu trên không gian các phần tử hằng. Theo mệnh đề 5 ta nhận được $F$ là toán tử ban đầu của $D$ ứng với nghịch đảo phải

$$R = R_0 - F R_0 = R_0 - \left( F_0 + \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j \right) R_0$$

$$\mathrm{F} = R_0 - F_0 R_0 - \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^j R_0 = R_0 - \sum_{j=1}^{n} P_j F_j D^{j-1} .$$

Đây là điều phải chứng minh.

**Định lý 3.** Giả sử $F_0,...,F_n$ là các toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ tương ứng với các nghịch đảo phải $R_0,\dots R_n$. Khi đó $F=\sum_{j=1}^{n} a_j F_j$ với các hằng số $a_j \in K$, $j=\overline{1,n}$ ( $K$ là thực hoặc phức) không đồng thời bằng 0 là toán tử ban đầu của $D$ khi và chỉ khi $\sum_{j=1}^{n} a_j = 1$, đồng thời $F$ là toán tử ban đầu ứng với nghịch đảo phải $R=\sum_{j=1}^{n} a_j R_j$ .

*Chứng minh.*

$(\Rightarrow)$ Giả sử $F$ là toán tử ban đầu của $D$, khi đó với mọi $0 \neq x \in \ker D$ ta có

$$x = Fx = \sum_{j=1}^{n} a_j F_j x = \sum_{j=1}^{n} a_j x = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)x \text{ hay } \sum_{j=1}^{n} a_j = 1;$$

$(\Leftarrow)$ Giả sử $\sum_{j=1}^{n} a_k = 1$ khi đó nếu

$FX \subset KerD$ với mọi $x \in KerD$ thì

$$Fx = \sum_{j=1}^{n} a_j F_j x = \sum_{j=1}^{n} a_j x = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)x = x,$$

Ta lại có $F^2 x = F(Fx) = Fx = x$ . Vậy $F$ là toán tử chiếu trên $KerD$, theo Mệnh đề 4 cho ta $F$ là toán tử ban đầu của $D$ ứng với nghịch đảo phải

$$R = R_0 - FR_0 = R_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j F_j R_0 = R_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j (I - R_j D) R_0 = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_j\right) R_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j R_j = \sum_{j=1}^{n} a_j R_j$$

Đó là điều phải chứng minh.

**Định lý 4.** Giả sử $D_j \in R(X)$ với mọi $j=\overline{1.n}$ và $F_j \in F_D$ là các toán tử ban đầu của $D_j$ ứng với $R_j \in \Re_{D_j}$ ( $j=\overline{1,n}$ ).

Khi đó toán tử $F = F_n + R_n F_{n-1} D_n + .... + R_n ....R_2 F_1 D_2 .....D_n$ là toán tử ban đầu của $D = D_1 D_2 ...D_n$ ứng với nghịch đảo phải $R = R_n R_{n-1} ....R_1$ của $D$.

*Chứng minh.*

Ta có $DR = D_1 ....D_n R_n ...R_1 = I$ do vậy $D \in R(X)$ và $R \in \Re_D$. Mặt khác

$$F = F_n + R_n F_{n-1} D_n + ....R_{n.} ....R_2 F_1 D_1 D_2 ....D_n$$
$$= I - R_n D_n + R_n \left(I - R_{m-1} D_{m-1}\right) D_m + ..... + R_n ....R_2 \left(I - R_1 D_1\right) D_2 .....D_n$$
$$= I - R_n D_n + R_n D_n - R_n R_{n-1} D_{n-1} D_n + .... + R_n ...R_2 D_2 ....D_n - R_n ...R_1 D_1 .....D_n$$
$$= I - RD$$

Vậy là toán tử ban đầu của $D$ ứng với nghịch đảo phải $R$.

**Hệ quả 2.** *Giả sử các giả thiết của Định lý 4 thỏa mãn và* $F$ *là toán tử ban đầu của* $D = D_1 D_2 ....D_n$ *ứng với* $R \in \Re_D$, *khi đó*

$$\Re_D = \{(R_n + F_n A_n).....(R_1 + F_1 A_1) : A_1, A_2, .....A_n \in L_0(X)\}$$

$$F_D = \{F_n(I - A_n D_n) + ...(R_n + F_n A_n)..(R_2 + F_2 A_2) F_1(I - A_1 D_1) D_2 ..D_n : A_1, A_2, ..A_n \in L_0(X)\}$$

*2.2.2. Công thức Taylor - Gontcharov*

*2.2.2.1. Cơ sở toán tử*

Cho $D \in R(X); R_0 \in \Re_D$ và $F_0$ là toán tử ban đầu của $D$ ứng với $R$.

Ta có

$$F_0 = I - R_0 D \Leftrightarrow I = F_0 + R_0 D \quad (1)$$

Xét $D$ là toán tử đạo hàm $Dx(t) = \frac{dx}{dt}$ và $R_0$ là toán tử nguyên hàm $R_0 x(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds$

Thì từ $(1)$ ta có ngay kết quả $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds$ , do đó

$$I = F_0 + R_0 D = F_0 + R_0 (F_0 + R_0 D)D = F_0 + R_0 F_0 D + R_0^2 D^2 \quad (*)$$

khi đó $x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} x''(\zeta)d\zeta d\tau$ công thức này được gọi là công thức khai triển Taylor cấp 1, tiếp tục quá trình với kỹ thuật tương tự ta thu được công thức khai triển Taylor cấp 2 như sau:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1}\int_{t_0}^{\tau_2} x'''(\zeta)d\zeta d\tau_1 d\tau_2$$

Thực hiện quá trình này $n$ lần ta thu đươc công thức khai triển sau đây và được gọi là công thức khai triển Taylor cấp $n$ của $x(t)$ tai điểm $t_0$:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + .....+ \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1}\int_{t_0}^{\tau_2}....\int_{t_0}^{\tau_n} x^{(n+1)}(\tau)d\tau d\tau_1 d\tau_2 ..d\tau_n$$

Như vậy công thức trên sau khi thực hiện kỹ thuật tương tự $n$ lần ta thu được công thức: $I = F_0 + R_0 F_0 D + R_0^2 F_0 D^2 + .... + R_0^n F_0 D^n + R_0^{n+1} D^{n+1}$ trên $DomD^{n+1}$

được gọi là công thức khai triển Taylor đối với $D \in R(X)$; $R_0 \in \Re_D$ và $F_0 \in F_D$ ứng với $R_0$.

*2.2.2.2. Công thức Taylor - Gontcharov*

Trước hết ta có nhận xét: Công thức $(*)$ chỉ cho ta thấy sự khai triển của $x(t)$ tại điểm $t_0$ nhưng chưa cho ta thấy được sự khai triển của nó tại nhiều điểm khác nhau, cụ thể là tại

$n+1$ điểm phân biệt $t_0,\ t_1,\ldots t_n$. Để khắc phục hạn chế đó, trong phần còn lại của bài báo, chúng tôi đã đề cập đến công thức tổng quát hơn công thức khai triển Taylor và được gọi là công thức khai triển Taylor-Gontcharov, công thức này giúp ta có thể khai triển $x(t)$ (nếu có thể) tại nhiều điểm khác nhau như đã nói ở trên.

Trước hết ta xét bài toán đơn giản sau đây:

*Bài toán 1.* Xác định đa thức $f(t)$ bậc 2 thỏa mãn các điều kiện:

$$f(t_0)=a_0; f'(t_1)=a_1; f''(t_2)=a_2$$

Giả sử $f(t)$ có dạng $f(t)=at^2+bt+c$ bằng phương pháp giải hệ trực tiếp ta dễ dàng tìm được $f(t)$ có dạng sau:

$$f(t)=f(t_0)+f'(t_1)(t-t_0)+\frac{f''(t_2)}{2!}\left(t^2-2tt_1-t_0^2+2t_0t_1\right)$$

$$=a_0+a_1(t-t_0)+\frac{a_2}{2!}\left(t^2-2tt_1-t_0^2+2t_0t_1\right)$$

Tuy nhiên việc giải bài toán trên bằng phương pháp giải hệ sẽ gặp nhiều khó khăn khi bậc của đa thức lớn dần $(\deg f\geq 3)$.

*Bài toán 2.* Xác định đa thức $f(t)$ bậc 3 thỏa mãn điều kiện

$$f(t_0)=a_0;\ f'(t_1)=a_1;\ f''(t_2)=a_2;\ f'''(t_3)=a_3.$$

Ta phân tích như sau

$$t-t_0=\int_{t_0}^{t}ds=Q_1(t,t_0)=\hat{Q}_1(t)$$

$$\frac{1}{2}\left(t^2-2t_1-t_0^2+2t_0t_1\right)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\int_{t_1}^{\tau_1}d\zeta\right)d\tau=Q_2(t,t_0,t_1)=\hat{Q}_2(t)$$

$$Q_3(t,t_0,t_1,t_2)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_1}^{\tau_1}\int_{t_2}^{\tau_2}d\tau_2d\tau_2d\tau_1=\int_{t_0}^{t}Q_2(\tau_1,t_1,t_2)d\tau_1=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\tau_1^2-2t_2\tau_1-t_1^2+2t_1t_2\right)d\tau_1=\hat{Q}_3(t)$$

khi đó ta có

$$f(t)=f(t_0)+f'(t_1)\hat{Q}_1(t)+f''(t_2)\hat{Q}_2(t)+f'''(t_3)\hat{Q}_3(t).$$

Như vậy qua 2 bài toán trên ta có thể dễ dàng chứng minh công thức sau đây bằng phương pháp quy nạp

$$f(t)=f(t_0)+f'(t_1)\hat{Q}_1(t)+f''(t_2)\hat{Q}_2(t)+.....+f^{(n)}(t_n)\hat{Q}_n(t,t_0,....,t_{n-1}),$$

trong đó $\hat{Q}_k(t)$ là đa thức bậc $k$ có các tính chất sau:

*a)* $\hat{Q}_k(t_0)=0$ ; $\hat{Q}_k^{'}(t_1)=0;\ldots\ldots;\hat{Q}_k^{(k-1)}(t_{k-1})=0$ và $\hat{Q}_k^{(k)}(t_k)=1$

*b)* $\hat{Q}_k(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_1}^{\tau_1}\int\limits_{t_2}^{\tau_2}.....\int\limits_{t_{k-1}}^{\tau_{k-1}}d\tau d\tau_1 d\tau_2....d\tau_n$

*c)* $Q_k(t,t_0,t_1.....,t_{k-1})=\int\limits_{t_0}^{t}Q_{k-1}(\tau,t_1,t_2,....,t_{k-1})d\tau$ .

Áp dụng trường hợp $D$ là toán tử đạo hàm $Dx(t)=\dfrac{dx}{dt}$; $R_k x(t)=\int\limits_{t_k}^{t}x(\tau)d\tau$ ta có công thức khai triển của $x(t)$ tại $n+1$ điểm phân biệt $t_0,.t$ .....$t_n$

$$x(t)=x(t_0)+x^{'}(t_1)\hat{Q}_1(t)+x^{'}(t_2)\hat{Q}_2(t)+.....+x^{(n)}(t_n)\hat{Q}_n(t)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_1}^{\tau_1}.....\int\limits_{t_n}^{\tau_n}x^{(n+1)}(\tau)d\tau d\tau_1....d\tau_n$$

Công thức này được gọi là công thức khai triển Taylor - Gontcharov của $x(t)$ tại $n+1$ điểm phân biệt $t_j$ $j=\overline{1,n}$. Bây giờ ta sẽ xây dựng công thức khai triển Taylor - Gontcharov cho toán tử $D$ bất kỳ. Giả sử $D\in R(X)$; $R_0,.R_1....R_k\in\Re_D$ và $F_k$ là các toán tử ban đầu của $D$ ứng với $R_k$, ta có $F_k=I-R_kD\Leftrightarrow I=F_k+R_kD.$ Mặt khác,

$$I=F_0+R_0D=F_0+R_0\,I\,D^1=F_0+R_0\left(F_1+R_1D\right)D=F_0+R_0F_1D+R_0R_1D^2$$

Được gọi là công thức khai triển Taylor - Gontcharov bậc 1, tiếp tục quá trình này $n$ lần ta được công thức:

$$I=F_0+R_0F_1D+R_0R_1F_2D^2+.....+R_0R_1.....R_{n-1}F_nD^n+R_0R_1....R_nD^{n+1}$$

Công thức này được gọi là công thức Taylor - Gontcharov ứng với toán tử $D$ với các nghịch đảo phải $R_k$, $k=\overline{1,n}$ và các toán tử ban đầu $F_k\in F_D$.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Nguyễn Xuân Liêm (1998), *Giải tích tập 1*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[2] Nguyễn Văn Mậu (2004), *Đa thức đại số và phân thức hửu tỷ*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Các bài toán nội suy và áp dụng*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

[4] Nguyễn Duy Tiến, Trần Đức Long (2004), *Bài giảng Giải tích*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[5] Nguyen Van Mau (2005), *Algebraic Elements and bondary valued problems in linear spaces*, VNU, Publisher, Ha Noi.

[6] Prezworska-Rolewicz (1973), *D. Equations transformed with argument*, An Algebraic Approach, Amsterdam-Warsaw.

# INITIAL OPERATOR AND TAYLOR-GONTCHAROV EXPAND

**Hoang Van Thi, Nguyen Tien Da**

ABSTRACT

*In this paper, we present some important characteristics of right invertible operators, and some applications of Taylor-Goncharov expand formula as an extension of the Taylor expand formula.*

**Keywords:** *Right invertible operator, Taylor-Gontcharov expand, initial operator.*

# LỰA CHỌN NỒNG ĐỘ AXIT AXETIC THÍCH HỢP CHO DUNG DỊCH THỤ ĐỘNG Cr(III)

**Hoàng Thị Hương Thủy[1], Vũ Hồng Nam[2]**

TÓM TẮT

*Khảo sát sự ảnh hưởng của nồng độ axit axetic trong dung dịch thụ động Cr(III) đến màu sắc, khối lượng và độ bền ăn mòn của màng thụ động trên nền thép mạ kẽm. Kết quả cho thấy, nồng độ axit axetic trong dung dịch có ảnh hưởng lớn tới khối lượng và độ bền ăn mòn của màng thụ động. Nồng độ axit axetic 6ml/l là thích hợp cho dung dịch thụ động Cr(III). Nồng độ axit axetic cao hơn sẽ làm cho bề mặt của lớp thụ động bị mờ và không làm tăng độ bền ăn mòn.*

**Từ khóa:** *Dung dịch thụ động Cr(III), kẽm, độ bền ăn mòn.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương pháp thụ động Cr(VI) hay Cr(III) được sử dụng phổ biến để cải thiện khả năng bảo vệ chống ăn mòn cho lớp mạ kẽm [6,8]. Trong thụ động Cr(VI), axit axetic được thêm vào dung dịch để tăng chiều dày màng trong các trường hợp cần phải đưa chiều dày màng lên cỡ 1000-1500 mn [8]. Hiện nay, nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng, dung dịch và lớp thụ động có chứa ion $Cr^{6+}$ có độc tính cao và có khả năng gây ung thư, chi phí xử lý nước thải cao [9]. Để thay thế lớp thụ động $Cr^{6+}$, nhiều dung dịch thụ động khác nhau được đề xuất, trong đó được quan tâm nhất là các dung dịch chứa ion $Cr^{3+}$ [1,2,3,4,7]. Trong phương pháp thụ động Cr(III), axit axetic chưa được đưa vào dung dịch thụ động [3,4,7] hoặc chỉ có trong phần chuẩn bị dung dịch [1,2], chưa có bất kì một nghiên cứu nào nói lên ảnh hưởng của nó đến màu sắc, khối lượng và độ bền ăn mòn của màng thụ động. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi trình bày kết quả lựa chọn nồng độ axit axetic thích hợp cho dung dịch thụ động Cr(III) sử dụng để thụ động cho lớp mạ kẽm trên nền thép.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Thực nghiệm

*2.1.1. Tạo mẫu thử nghiệm*

Mẫu thí nghiệm: thép cacbon kích thước 100 x 50 x 1,2mm được đánh bóng bằng giấy ráp, tẩy dầu mỡ, tẩy gỉ, sau đó được mạ kẽm (theo quy trình ULTIMAT AZ của hãng Enthone) trong bể mạ có dung tích 25 lít với thành phần và chế độ mạ được trình bày ở bảng 1.

[1,2] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

**Bảng 1. Thành phần và chế độ mạ kẽm**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $ZnCl_2$ | 60g/l | $NH_4Cl$ | 250g/l |
| AZA | 30ml/l | AZB | 1,5ml/l |
| pH | 4,8 - 5,4 | Nhiệt độ | Thường |
| $D_k$ | $2A/dm^2$ | Thời gian | 30 phút |
| Anot | Kẽm 99,995% | Chế độ đảo trộn | Đung đưa catot |

Lớp mạ kẽm đạt được chiều dày trung bình 13µm.

Pha chế dung dịch: $DD_0$ là dung dịch thụ động Cr(III) có thể tích 1 lít với thành phần cơ bản trình bày trong bảng 2. Từ $DD_0$, pha chế các dung dịch từ $DD_1$ đến $DD_6$ là các dung dịch thụ động Cr(III) có chứa thêm axit axetic lần lượt là 1ml, 2ml, 4ml, 6ml, 8ml và 10ml.

Các hoá chất được sử dụng là hoá chất tinh khiết (P) có xuất xứ từ Trung Quốc. Các dung dịch được pha bằng nước cất.

**Bảng 2. Thành phần cơ bản của dung dịch thụ động Cr(III)**

| | |
|---|---|
| Cr(III) (ở dạng $Cr_2(SO_4)_3.6H_2O$) | 5g/l |
| Chất tạo phức | 6g/l |
| Co(II) (ở dạng $CoSO_4.7H_2O$) | 2g/l |
| pH | 2-2,5 |
| Thời gian nhúng | 60s |
| Nhiệt độ | 20-30$^oC$ |

pH của dung dịch sau khi thêm axit axetic được đo bằng máy đo pH METERLAB pHM210 và được điều chỉnh bằng $HNO_3$ hoặc $NH_4OH$.

Thụ động lớp mạ kẽm: mẫu mạ kẽm được hoạt hoá trong dung dịch $HNO_3$ 0,5% thể tích trong 3-5s. Tiến hành thụ động các mẫu lần lượt trong dung dịch thụ động Cr(III). Sau khi thụ động, mẫu được rửa bằng nước, nước cất, xì khô và sấy 30 phút ở nhiệt độ 80$^oC$.

*2.1.2. Phương pháp thử nghiệm*

Màng thụ động sau khi đã sấy khô được để 48h trong bình hút ẩm, sau đó được đánh giá màu sắc bằng mắt thường.

Xác định khối lượng màng thụ động bằng cân phân tích SHIMADZU AEG-220G với độ chính xác 0,0001g:

*$m_o$ - khối lượng của mẫu thép trước khi mạ.*

*$m_1$ - khối lượng của mẫu sau khi mạ kẽm.*

*$m_2$ - khối lượng của mẫu sau khi thụ động.*

*$m_3$ - khối lượng của mẫu khi bóc lớp thụ động.*

Tiến hành bóc lớp thụ động trong dung dịch $CrO_3$ 200g/l, nhiệt độ 80$^0C$, thời gian 1 phút. Sau đó, mẫu được rửa sạch, sấy khô ở nhiệt độ 80$^0C$, thời gian 30phút và cân lại khối lượng ($m_3$). Khối lượng màng thụ động được tính theo công thức sau: $\Delta m_a = (m_2 - m_3).1000$ (mg) [1].

Trong quá trình thụ động kẽm bị tan mất một phần vào dung dịch, khối lượng kẽm hòa tan được tính như sau: $\Delta m_b = (m_1 - m_3).1000$ (mg) [2]

Độ bền ăn mòn của lớp thụ động được xác định bằng phương pháp phun muối (NSS) theo tiêu chuẩn JIS H 8502:1999 trong tủ mù muối Q - FOG CCT 600 (Mỹ) với điều kiện thử nghiệm được trình bày trên bảng 3 [5].

**Bảng 3. Điều kiện thử nghiệm mù muối**

| pH dung dịch | Nồng độ NaCl | Áp suất phun | Nhiệt độ kiểm tra | Nhiệt độ bồn bão hoà | Tốc độ phun |
|---|---|---|---|---|---|
| 6,5 - 7,2 | 5% | 1,0 Atm | 35 ± 2°C | 47± 2°C | 2ml/giờ/80cm$^2$ |

Số mẫu thử nghiệm cho mỗi loại: tối thiểu 3 mẫu.

### 2.2. Kết quả, thảo luận

*2.2.1. Màu sắc màng thụ động*

Các mẫu thụ động sau khi sấy được quan sát trực tiếp bằng mắt thường trên bề mặt mẫu. Kết quả trình bày trên bảng 4.

**Bảng 4. Ảnh hưởng của nồng độ axit axetic đến màu sắc màng thụ động**

| Nồng độ axit axetic, ml/l | Màu sắc màng thụ động |
|---|---|
| 0 | Vàng nhạt |
| 1 | Vàng - Hồng nhạt |
| 2 | Xanh nước biển - Vàng |
| 4 | Hồng - Vàng |
| 6 | Xanh lá cây - Hồng |
| 8 | Xanh lá cây, mờ mép mẫu |
| 10 | Xanh lá cây, mờ mép mẫu |

Khi tăng nồng độ axit axetic, màu sắc của các màng thụ động có sự thay đổi. Sự thay đổi màu sắc nói lên sự tăng đáng kể chiều dày màng thụ động [9]. Khi nồng độ axit axetic tăng đến 8ml/l, có hiện tượng mờ mép mẫu và vết mờ có chiều hướng rộng hơn khi nồng độ axit axetic tăng thêm. Điều này cho thấy, nồng độ axit axetic ảnh hưởng đến độ dày màng thụ động nhưng chỉ trong phạm vi cho phép, nếu quá giới hạn đó khả năng bám dính của màng với nền giảm ảnh hưởng đến ngoại quan của sản phẩm.

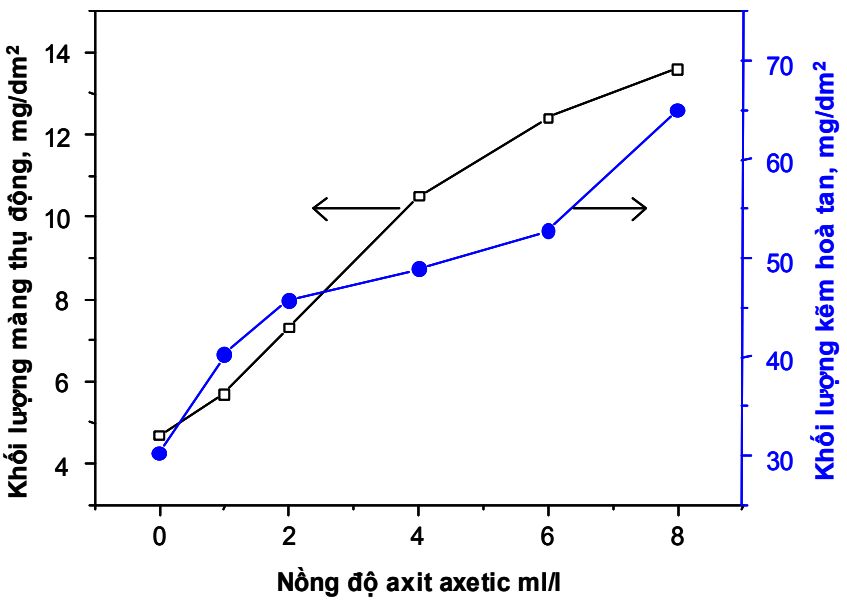
*2.2.2. Khối lượng màng thụ động*

Tiến hành khảo sát khối lượng màng thụ động khi thay đổi nồng độ axit axetic trong dung dịch thụ động, sự thay đổi khối lượng màng thụ động và khối lượng kẽm hoà tan của màng thụ động được thể hiện trên bảng 5.

**Bảng 5. Ảnh hưởng của nồng độ axit axetic đến khối lượng màng thụ động và khối lượng kẽm hòa tan**

| Nồng độ axit axetic, ml/l | Khối lượng màng thụ động, $mg/dm^2$ | Khối lượng kẽm hòa tan, $mg/dm^2$ |
|---|---|---|
| 0 | 4,7 | 4,4 |
| 1 | 5,7 | 6,7 |
| 2 | 7,3 | 8,1 |
| 4 | 10,5 | 8,8 |
| 6 | 12,4 | 9,4 |
| 8 | 13,6 | 12,9 |

Qua bảng trên cho thấy, khi tăng nồng độ axit axetic trong dung dịch thụ động, ảnh hưởng rất lớn đến khối lượng lớp thụ động và tổng lượng kẽm bị hòa tan khỏi nền. Khối lượng của lớp thụ động tăng gần như tuyến tính, khi nồng độ axit axetic tăng lên 8 ml/l, khối lượng lớp thụ động tăng lên gần gấp 3 so với khi không có mặt axit axetic. Khi tăng nồng độ axit axetic trong dung dịch thụ động, tổng lượng kẽm bị hòa tan khỏi nền tăng, tuy nhiên không tuyến tính. Khối lượng kẽm hòa tan có xu hướng tăng nhanh khi tăng nồng độ axit axetic từ 4 lên 8ml/l (hình 1).




**Hình 1. Thay đổi khối lượng màng thụ động và khối lượng kẽm hoà tan theo nồng độ axit axetic trong dung dịch**

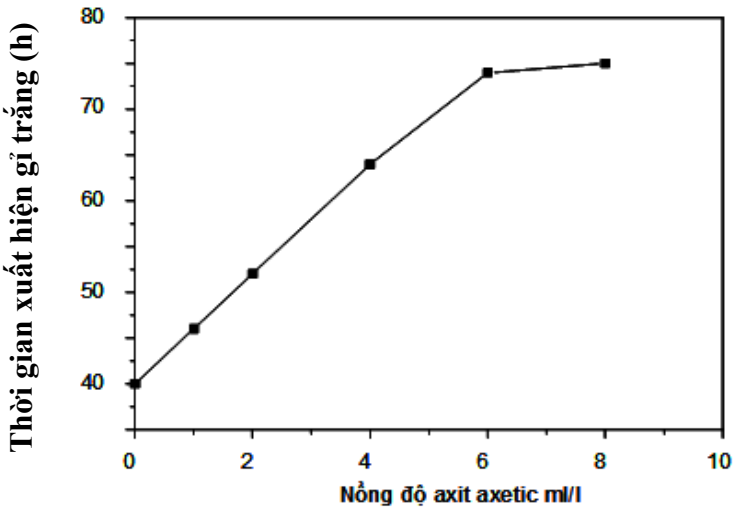
*2.2.3. Thử nghiệm mù muối*

Ảnh chụp và kết quả đánh giá thời gian xuất hiện gỉ trắng trên bề mặt mẫu nghiên cứu được thể hiện trên hình 2, hình 3 và bảng 6.

**Bảng 6. Ảnh hưởng của nồng độ axit axetic đến thời gian xuất hiện gỉ trắng trên bề mặt mẫu**

| Nồng độ axit axetic, ml/l | Thời gian xuất hiện gỉ trắng trên bề mặt, giờ |
|---|---|
| 0 | 40,0 |
| 1 | 45,5 |
| 2 | 52,5 |
| 4 | 64,6 |
| 6 | 74,9 |
| 8 | 75,0 |

**Hình 2. Mẫu thụ động trước phun muối và khi xuất hiện gỉ trắng**




**Hình 3. Ảnh hưởng nồng độ axit axetic trong dung dịch đến thời gian xuất hiện gỉ trắng trên bề mặt**

Khi tăng nồng độ axit axetic đến 6ml/l, độ bền ăn mòn của mẫu thụ động tăng tuyến tính, kết quả này tương thích với sự tăng khối lượng màng thụ động. Còn khi nồng độ axit axetic tăng đến 8ml/l độ bền ăn mòn gần như không tăng mặc dù khối lượng màng thụ động tăng (hình 3). Điều này có thể giải thích, khi tăng độ dày màng thụ động khả năng bám dính của màng với nền giảm, độ xốp của màng tăng lên nên độ bền ăn mòn không tăng.

## 3. KẾT LUẬN

Qua khảo sát về màu sắc, khối lượng, độ bền ăn mòn của lớp thụ động $Cr^{3+}$ trên nền thép mạ kẽm khi có mặt axit axetic trong dung dịch thụ động, chúng tôi đi đến những kết luận sau:

Khi tăng nồng độ axit axetic trong dung dịch thụ động, khối lượng màng thụ động tăng đồng thời với sự tăng của khối lượng kẽm hoà tan và màu sắc cũng thay đổi theo chiều hướng tăng chiều dày màng thụ động. Độ bền ăn mòn của màng thụ động cũng tăng khi nồng độ axit axetic tăng từ 0 - 6ml/l.

Sự tăng của khối lượng màng thụ động và sự thay đổi màu sắc nói lên sự tăng đáng kể chiều dày màng khi có mặt của axit axetic.

Khi tăng nồng độ axit axetic đến (8ml/l) độ bền ăn mòn gần như không tăng, bề mặt của lớp thụ động bị mờ mép mẫu.

Nồng độ axit axetic 6ml/l là lựa chọn thích hợp cho dung dịch thụ động.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thị Thanh Hương, Lê Bá Thắng (2014), *Độ bền ăn mòn của màng thụ động $Cr^{3+}$ trên lớp mạ kẽm*, Tạp chí Hóa học. 52 (6B) tr.124-127.

[2] Nguyễn Thị Thanh Hương, Lê Bá Thắng, Trương Thị Nam, Nguyễn Văn Chiến, Nguyễn Văn Khương, Lê Đức Bảo (2015), *Nghiên cứu hình thái, cấu trúc của màng thụ động $Cr^{3+}$ trên lớp mạ kẽm*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ. 53 (2) tr.221-230.

[3] J. Diaddario, L. Leonard and M. Marzano (2003), *Trivalent chromate conversion coating*, US patent No 20030145909.

[4] Grasso L., Fantoli A.S. and all (2006), *Corrosion resistance of Cr(III) based conversion layer on zinc coatings in comparison with a traditional Cr(VI) based passivation treatment*, La Metallurgia Italiana pp.31-39.

[5] Japanese industrial standard JIS H 8502:1999.

[6] P. Preikschat, R.Ransen and P. Hulser, (2001), *Chromium(VI) - free conversion layer and process for producing the same*, US patent No 6287704.

[7] Wei-Kun Chen, Ching-Yuan Bai, Chung-Ming Liu, Chao-Sung Lin, Ming-Der Ger (2010), *The effect of chromic sulfate concentration and immersion time on the structures and anticorrosive performance of the Cr(III) conversion coatings on aluminum alloys*, Applied Surface Science 256, pp.4924-4929.

[8] L.F.G William (1978), *The effect of chromate content on the corrosion of chromated zinc electroplate on steel*, Surface Technology 7, tr.113-127.
[9] Zaki N (2007), *Trivalent chrome conversion coating for zinc and zinc alloys*, Metal Finishing 105, tr.425-435.

# CONCENTRATION RANGE OF ACETIC ACID FOR CR(III)- BASED CONVERSION SOLUTIONS

**Hoang Thi Huong Thuy, Vu Hong Nam**

ABSTRACT

*In this paper, we examined the effect of acetic acid concentration in the Cr(III)-based conversion solutions on the color, mass and corrosion durability of the coatings of zinc coated steel. The results showed that the concentration of acetic acid solution has a major influence on the mass and corrosion durability of based conversion coatings. The acetic acid concentration of 6ml/l is suitable for Cr(III)-based conversion coatings. Higher concentrations of acetic acid will blur the surface of the based conversion coatings and does not increase corrosion durability.*

**Keywords:** *Cr(III)-based conversion coatings, zinc, corrosion durability.*

# NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG UỐN CONG VÙNG NĂNG LƯỢNG LÊN TÍNH CHẤT ĐIỆN CỦA HẠT TẢI TRONG MÔ HÌNH GIẾNG LƯỢNG TỬ PHA TẠP MỘT PHÍA

**Nguyễn Quyết Tiến[1], Trần Thị Hải[2]**

TÓM TẮT

*Ảnh hưởng của pha tạp điều biến một phía lên hiện tượng vận chuyển của hạt tải giam cầm trong giếng thế vuông góc ở nhiệt độ thấp được nghiên cứu. Bằng việc sử dụng phương pháp biến phân và các hàm phụ, các biểu thức mô tả ảnh hưởng của pha tạp lên sự phân bố của hạt tải trong giếng lượng tử đã được tác giả đưa ra. Các biểu thức mô tả các cơ chế tán xạ tác động lên quá trình vận chuyển của hạt tải cũng được xác định, đồng thời chỉ ra ảnh hưởng của pha tạp bất đối xứng một phía lên sự phân bố của hạt tải phụ thuộc vào mức pha tạp và độ rộng kênh dẫn.*

**Từ khóa:** *Pha tạp một phía, pha tạp điều biến, phương pháp biến phân, mức pha tạp, độ rộng kênh dẫn.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Giếng lượng tử pha tạp điều biến dựa trên Ge và SiGe đã nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây vì tầm quan trọng của nó trong việc ứng dụng máy móc, thiết bị, nhất là các kênh dẫn loại p với độ linh động cao của hạt tải. Chúng được ứng dụng rộng rãi trong các cấu trúc transitor hiệu ứng trường. Để tăng độ linh động của khí lỗ trống, các cấu trúc dị chất với các kênh dẫn SiGe đã được quan tâm nghiên cứu mạnh mẽ [1,3].

Năm 2008, A. Gold [4] đã sử dụng lí thuyết flat-band và thấy rằng độ linh động tăng đơn điệu và phụ thuộc vào bề rộng giếng lượng tử. Những giải thích của [4] nhiều điểm chưa phù hợp với các nghiên cứu thực nghiệm về sự phụ thuộc của độ linh động vào bề rộng giếng lượng tử [6]. Các mô hình này chỉ giải thích được một số kết quả thực nghiệm như độ linh động $\mu$ phụ thuộc vào nồng độ hạt tải $p_s$, nhưng không giải thích được sự phụ thuộc của độ linh động $\mu$ vào bề rộng giếng lượng tử L.

Để khắc phục hạn chế của những tính toán lý thuyết khi sử dụng mô hình flat-band, năm 2007 Giáo sư Quang và cộng sự [7] đã đưa ra một lý thuyết bent-band, trong đó nhóm tác giả tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng lên sự phân bố của hạt tải trong giếng, từ đó xác định các cơ chế tán xạ cơ bản ảnh hưởng lên quá trình vận chuyển của hạt tải trong mô hình giếng lượng tử pha tạp một phía. Cụ thể là,

[1] *Giáo viên Trường Trung học phổ thông Bắc Sơn, huyện Ngọc Lặc, Thanh Hóa*
[2] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

dưới ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng, các hạt tải trong trường hợp pha tạp một phía không còn đối xứng như trong mô hình flat-band mà lệch về phía có pha tạp. Theo mô hình này thì việc điều biến bất đối xứng hàm sóng, nghĩa là độ dốc của hàm sóng thay đổi, làm tăng tán xạ do độ nhám bề mặt gây nên mà tán xạ này là tán xạ chủ đạo và vì thế độ linh động của hạt tải giảm mạnh.

Mục đính chính của bài báo này là xét đến ảnh hưởng hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng do pha tạp và đưa ra các cơ chế tán xạ chủ đạo trong giếng lượng tử vuông góc SiGe/Ge/ SiGe ở nhiệt độ thấp. Lí thuyết của nhóm tác giả bao gồm tất cả các nguồn tán xạ, kể cả thế biến dạng khớp sai. Hơn nữa, lí thuyết được giới thiệu trong bài báo sẽ hoàn thiện mô hình thực của giếng lượng tử, với việc xét đến hiệu ứng uốn cong vùng.

Sơ đồ trình bày bài báo này như sau: Trong mục 2 mô hình giếng lượng tử pha tạp một phía được giới thiệu, việc tính toán các cơ chế tán xạ cơ bản ảnh hưởng lên quá trình vận chuyển của hạt tải trong giếng được trình bày ở mục 3, phần 4 là một số kết quả tính số về ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng do pha tạp và phần 5 là phần tổng kết.

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Mô hình giếng lượng tử vuông góc pha tạp điều biến một phía

#### *2.1.1. Hàm sóng biến phân*

Đối với giếng lượng tử có chiều cao rào thế là vô hạn, chúng tôi đưa ra hàm sóng bao ở trạng thái cơ bản có dạng như sau: [7]

$$\zeta(z)=\begin{cases} B\sqrt{\pi/L}\cos\left(\pi z/L\right)e^{-cz/L} & \text{khi } |z|\le L/2 \\ 0 & \text{khi } |z|>L/2, \end{cases} \tag{1}$$

Ở đây L là bề rộng của kênh dẫn, B, c là các tham số biến phân.

Sử dụng điều kiện chuẩn hóa hàm sóng ta có:

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz\left|\zeta(z)\right|^2 = 1 \tag{2}$$

Ta có:

$$\frac{\pi}{2}B^2\gamma_1(c)=1 \tag{3}$$

với

$$k_o=\frac{c}{L}\ \left(c=k_oL\right) \tag{4}$$

trong đó, $\gamma_1(c)$ là hàm được xác định bởi phương trình (17)

Vì vậy, ta chỉ cần xác định một tham độc lập c, đó chính là đại lượng đặc trưng cho ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng lên sự phân bố hạt tải trong giếng.

*2.1.2. Thế Hartree*

Trong mô hình bent-band, Hamiltonian xác định bởi phương trình:

$$H = T + V_b(z) + V_H(z) \tag{5}$$

Trong đó, T là động năng, $V_b(z)$ và $V_H(z)$ lần lượt là thế rào và thế Hartree.

Thế Hartree được tạo bởi nguồn tạp bị ion hóa $N_I(z)$ và nguồn hạt tải tích điện p(z). Biên dạng pha tạp ở phía đỉnh rào $(z < -\frac{L}{2})$ có mật độ khối của tạp $N_I$ nằm trong miền từ $z_d$ đến $-z_s$, Với $z_d = L_d + L_s + \frac{L}{2}$ và $z_s = L_s + \frac{L}{2}$, $L_d$ và $L_s$ lần lượt là độ dày của lớp pha tạp và lớp cách điện.

Thế Hartree bao gồm tổng của thế tạp và hạt tải:

$$V_H(z) = V_I(z) + V_S(z) \tag{6}$$

Phương trình Poisson cho thế Hartree do khối tạp và khối hạt tải có dạng:

$$\frac{d^2}{dz^2} V_H(z) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_L} \left[ N_I(z) - p(z) \right] \tag{7}$$

với

$$N_I(z) = \begin{cases} N_I, & -z_d \le z \le -z_s \\ 0, & elsewhere \end{cases} \tag{8}$$

Phân bố của hạt tải nằm trong miền: $p(z) = p_s |\zeta(z)|^2$ với $p_s$ là mật độ lá tạp hai chiều và hàm sóng cho bởi phương trình (1).

Sử dụng điều kiện cân bằng điện tích ta có:

$$p_s = N_I L_d \tag{9}$$

Tiến hành giải phương trình Poisson cho thế Hartree do khối tạp và khối hạt tải tạo ra, kết hợp với điều kiện biên của thế

$$z = -\infty : \partial V_H(-\infty) / \partial z = 0, \quad V_H(-\infty) = E_I \tag{10}$$

trong đó, $E_I$ là năng lượng liên kết của tạp bị ion hoá.

Kết quả ta thu được thế Hartree có dạng như sau:

$$V_H(z) = E_I + \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_L} \begin{cases} 0, & z < -z_d \\ (N_I/2)(z + z_d)^2, & -z_d \le z \le -z_s \\ (N_I/2)(z_d - z_s)(2z + z_d + z_s), & -z_s < z < -L/2 \\ (N_I/2)(z_d^2 - z_s^2) - p_s[\mathrm{g(z)\text{-}zg'_+\text{-}h_-}] & -L/2 < z < L/2 \\ (N_I/2)(z_d^2 - z_s^2) - p_s[\mathrm{h_+\text{-}h_-}] & -L/2 \le z \le 0, \end{cases} \tag{11}$$

Trong đó, $\varepsilon_L$ là hằng số điện môi của giếng lượng tử.

g(z) và h(z) được xác định:

$$g(z)=\frac{\pi B^2 L}{8}e^{-\frac{2cz}{L}}\left\{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(c^2+\pi^2)^2}\left[(c^2-\pi^2)\cos\frac{2\pi z}{L}-2\pi c\sin\frac{2\pi z}{L}\right]\right\} \quad (12)$$

$$h(z)=g(z)-zg'(z) \quad (13)$$

Các kí hiệu $\pm$ ứng với các giá trị tại $z=\pm\frac{L}{2}$, trong trường hợp này: $g'_{+}=\partial g/\partial z\,|_{\left(z=+\frac{L}{2}\right)}$

*2.1.3. Năng lượng tổng cộng của hạt*

Năng lượng tổng cộng của hạt ở trạng thái cơ bản:

$$E(c)=\langle T\rangle+\langle V_I\rangle+\langle V_s\rangle \quad (14)$$

Năng lượng riêng trong tổng năng lượng được dẫn ra dưới đây.

Trong đó, động năng trung bình có dạng:

$$\langle T\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dz\zeta(z)T\zeta(z) \quad (15)$$

$$\langle T\rangle=-\frac{\pi\hbar^2B^2}{4m_zL^2}\left\{(c^2-\pi^2)\gamma_1(c)+2\pi c\omega_1(c)\right\}, \quad (16)$$

Ở đây, $m_z$ là khối lượng hiệu dụng của hạt tải; $\gamma_n(x)$ và $\omega_n(x)$ được cho bởi phương trình:

$$\gamma_n(x)=\left[\frac{1}{x}+\frac{(-1)^n x}{x^2+n^2\pi^2}\right]\sinh x$$
$$\omega_n(x)=\frac{(-1)^n n\pi}{x^2+n^2\pi^2}\sinh x, \quad (17)$$

Thế trung bình của tạp cho bởi:

$$\langle V_I\rangle=E_I+\frac{2\pi e^2N_I}{\varepsilon_L}(z_d^2-z_s^2) \quad (18)$$

Thế trung bình của hạt tải:

$$\langle V_S\rangle=-\frac{4\pi e^2}{\varepsilon_L}p_s\int_{-\infty}^{+\infty}dz\zeta(z)V_S(z)\zeta(z) \quad (19)$$

Hay

$$\langle V_s\rangle=-\frac{\pi^3e^2B^4p_sL}{4\varepsilon_L(c^2+\pi^2)}\left\{\frac{\pi^2}{c}\left[e^c\gamma_1(c)\left(\frac{c^3-3c^2+\pi^2(c-1)}{c(c^2+\pi^2)}\right)-e^{-c}\frac{\partial\gamma_1(c)}{\partial c}\right]+\frac{1}{(c^2+\pi^2)}\right.$$
$$\left.\times\left[\left(2c^2+\pi^2+\frac{\pi^4}{c^2}\right)\gamma_1(2c)+\frac{c^2-\pi^2}{2}\left[\gamma_2(2c)-2\gamma_0(2c)\right]-\pi c[\omega_2(2c)+2\omega_1(2c)\right]\right. \quad (20)$$

Tại nhiệt độ thấp $T = 0$, năng lượng của cả khối khí là nhỏ nhất. Ta nhận thấy năng lượng/số hạt chính là năng lượng trung bình. Tiến hành cực tiểu hóa năng lượng toàn phần ứng với một hạt ta sẽ xác định được tham số biến phân $c$, từ đó xác định được hàm sóng.

### 2.2. Các thế tán xạ cơ bản trong giếng lượng tử pha tạp điều biến một phía

*2.2.1. Độ nhám bề mặt (SR)*

Ta biết rằng độ lớn của thế tán xạ trong không gian véctơ sóng được xác định bởi giá trị cục bộ của hàm sóng tại các vị trí biên $\zeta_{\mp} = \zeta\left(z = \mp L/2\right)$, giá trị của thế trong không gian véctơ sóng đối với các tán xạ từ bề mặt nhám phía đỉnh có dạng:

$$U_{SR\mp}(q) = V_0 \left|\zeta_{\mp}\right|^2 \Delta_q, \tag{21}$$

ở đây, $\Delta_q$ là biến đổi Fourier hai chiều của cấu hình bề mặt.

Tiến hành tính tích phân phương trình Schrodinger 1 chiều với hàm sóng bao cho bởi (1) từ $z = \mp\infty$ tới $z = z_0$ $(z_0 > -L/2)$. Ta được:

$$\begin{aligned} V_0\left|\varsigma_-\right|^2 = {} & [E(c) - V_0(z_o)]\varsigma^2(0) \mp \frac{\pi^3 e^2 B^4 p_s}{2\varepsilon_L\left(c^2+\pi^2\right)}\left\{\pi^2 \frac{e^{-c}}{c}\Gamma_1\left(\pm c, \pm\delta\right)\right. \\ & -\left(\frac{2c^2+\pi^2}{c}\right)\Gamma_1\left(\pm 2c, \pm\delta\right) - \frac{c}{2}\left[\Gamma_2\left(\pm 2c, \pm\delta\right) - \Gamma_0\left(\pm 2c, \pm\delta\right)\right] \pm \\ & \left. \pm\frac{\pi}{2}\left[\Omega_2(\pm 2c, \pm\delta) + 2\Omega_1(\pm 2c, \pm\delta)\right]\right\} \end{aligned} \tag{22}$$

ở đây E(c) là năng lượng tổng cộng của hạt ở trạng thái cơ bản.

*2.2.2. Thế biến dạng khớp sai (DP)*

Trong mô hình giếng lượng tử mà ta nghiên cứu ở đây, lớp giếng bị biến dạng với độ lệch mạng như sau:

$$\in_{\|} = \frac{a_{\|} - a_0}{a_0} \tag{23}$$

Các công trình [2], [9] cũng chỉ ra, thế biến dạng khớp sai đối với các loại hạt tải khác nhau là khác nhau, đối với điện tử chính là thành phần chéo của tensor trường biến dạng, trong khi đó đối với lỗ trống phải bao gồm tất cả các thành phần.

Sử dụng hàm sóng từ phương trình (1) chúng tôi xác định được biểu thức cho hàm tự tương quan cho thế biến dạng khớp sai có dạng:

$$\begin{aligned} U_{DP}^{(t/b)}(q,z) = {} & \left(\frac{\pi^{3/2}\alpha \in_{\|} \Lambda\Delta B^2}{4L}\right) F_{DP}^{(t/b)}(t) \times \\ & \times\left\{\frac{3}{2}\left[b_s(K+1)\right]^2 (1 + si\,\mathrm{n}^4\varphi + \cos^4\varphi) + \left(\frac{d_s G}{4c_{44}}\right)^2 (1 + \sin^2\varphi\cos^2\varphi)\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{24}$$

Trong đó, thừa số dạng

$$F_{DP}(t) = t^2 e^{-t}\left[\gamma_1 (c \pm t/2)\right]^2 F_R(t) \tag{25}$$

*2.2.3. Tạp chất bị ion hóa (RI)*

Từ mô hình trên, ta tiến hành xử lý nhiệt trong quá trình nuôi epitaxy chùm phân tử. Trước khi bị đông đặc, tại nhiệt độ cao, các tạp chất bị khuếch tán, trong khi khuếch tán chúng tương tác Coulomb với nhau. Chính tương tác này làm giảm xác suất cho thăng giáng lớn của nồng độ tạp và tạo ra xu hướng phân bố đều, khi đó trường tạp ngẫu nhiên sẽ yếu đi. Sự phân bố tạp tại nhiệt độ thấp chính là sự phân bố tức thời của tạp tại nhiệt độ $T_0$ mà tại đó quá trình khuếch tán bị đóng băng. Ở nhiệt độ cao, tương quan giữa các ion giảm hơn đi so với hàm tự tương quan cho các tạp bị tán xạ bởi một hệ số, vì vậy

$$\left\langle \left|U_{RI}(q)\right|^2 \right\rangle_c = \left\langle \left|U_{RI}(q)\right|^2 \right\rangle F_C(qL), \tag{26}$$

Từ đó ta tìm được hàm tự tương quan cho tạp có dạng [6]

$$\left\langle \left|U_{RI}(q)\right|^2 \right\rangle_c = \left(\frac{2\pi e^2}{\varepsilon_L q}\right)^2 \frac{N_I L^3}{4} F_{RI}(qL), \tag{27}$$

$$F_C(q) = \frac{t}{t+t_c}, \quad t_c = q_c L \ , \ F_{RI}(t) = \frac{R^2(t)}{2}\frac{e^{-2st} - e^{-2dt}}{t^2(t+t_c)}, \tag{28}$$

Như vậy, với việc sử dụng hàm sóng bao ở phương trình (1), chúng ta đã xác định được hàm tự tương quan cho tất cả các cơ chế tán xạ của giếng lượng tử pha tạp điều biến đối xứng dưới dạng giải tích. Các hàm tự tương quan này đều phụ thuộc vào tham số biến phân c, vì vậy chúng ta phải tính đến ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng.

Ở nhiệt độ thấp, các hạt tải có thể chịu ảnh hưởng của các cơ chế tán xạ sau: Tạp xa (RI), độ nhám bề mặt (SR), thế biến dạng khớp sai (DP). Thời gian sống tổng cộng được xác định bởi quy tắc Matthiessen:

$$\frac{1}{\tau_{tot}} = \frac{1}{\tau_{RI}} + \frac{1}{\tau_{SR}^{tot}} + \frac{1}{\tau_{DP}^{tot}} \tag{29}$$

Thời gian sống vận chuyển được biểu diễn qua hàm tự tương quan:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{(2\pi)^2 \hbar E_F}\int_0^{2k_F} dq \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q^2}{(4k_F^2 - q^2)^{1/2}} \frac{\left\langle \left|U(q)\right|^2 \right\rangle}{\varepsilon^2(q)} \tag{30}$$

Như đã biết, độ linh động được xác định bằng

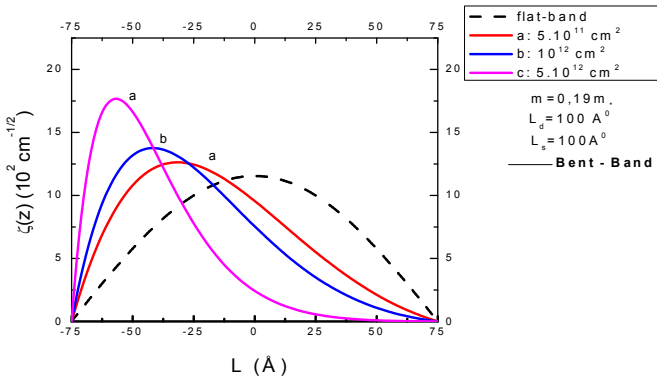
$$\mu = \frac{e\tau}{m^*} \tag{31}$$

Với m* là khối lượng hiệu dụng, τ là thời gian sống vận chuyển của điện tử. Công thức (32) cho thấy việc một trong các biện pháp nâng cao độ linh động là tìm cách kéo dài thời gian sống. Trong nhiều bài toán của hiện tượng vận chuyển, vấn đề trung tâm chuyển

sang các bài toán nghiên cứu thời gian sống và kết luận về hai đại lượng trên trong nhiều trường hợp là đồng nhất.

### 2.3. Kết quả tính số ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng

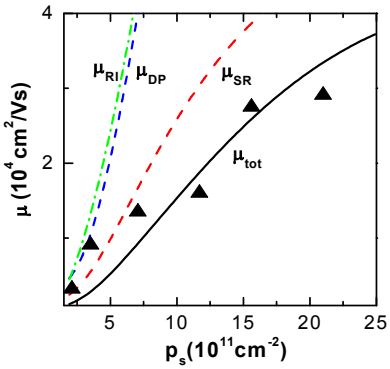
Trước tiên là kết quả tính số cho thấy sự thay đổi của hàm sóng khi có hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng.




**Hình 1. Hàm sóng bao ζ phụ thuộc vào bề rộng giếng lượng tử L với các giá trị khác nhau của $p_s$**

Đồ thị được vẽ cho trường hợp L = 150A$^0$ với các giá trị khác nhau của nồng độ hạt tải $p_s$ = 5.10$^{11}$, 10$^{12}$, 5.10$^{12}$cm$^{-2}$. Ta thấy rằng dưới ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng do pha tạp, hình dạng của hàm sóng biểu thị sự phân bố của hạt tải trong giếng có sự thay đổi đáng kể, không còn đối xứng như trong mô hình flat-band mà nó tăng về phía có pha tạp và giảm về phía không có pha tạp. Sự thay đổi này phụ thuộc vào mức pha tạp và bề rộng kênh dẫn.

Tiếp theo, chúng tôi vẽ độ linh động của hạt tải do các cơ chế tán xạ SR, DP, RI gây ra và độ linh động tổng cộng của hạt phụ thuộc vào nồng độ hạt tải trong giếng $Si_{0.3}Ge_{0.7}$/Ge/ $Si_{0.3}Ge_{0.7}$ với số liệu thực nghiệm trong [8].




**Hình 2. Độ linh động gây bởi các cơ chế tán xạ và độ linh động tổng cộng phụ thuộc vào nồng độ hạt tải $p_s$**

Ở đây L = 75Å, biên dạng pha tạp có giá trị $L_d$ = 100 Å, $L_s$ = 100 Å, các tham số nhám bề mặt $\Delta = 4.8$ Å, $\Lambda = 120$ Å. Ta nhận thấy độ linh động tổng cộng được tính theo lý thuyết do các cơ chế tán xạ RI, DP, SR cho kết quả phù hợp khá tốt với thực nghiệm (các điểm tam giác trên hình).

## 3. KẾT LUẬN

Nghiên cứu ảnh hưởng của pha tạp điều biến một phía lên hiện tượng vận chuyển của hạt tải giam cầm trong giếng thế vuông góc ở nhiệt độ thấp. Chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân để nghiên cứu ảnh hưởng của pha tạp điều biến một phía lên hiện tượng vận chuyển của hạt tải giam cầm trong giếng thế vuông góc ở nhiệt độ thấp. Bằng việc sử dụng các hàm phụ, chúng tôi đã đưa ra biểu thức giải tích mô tả ảnh hưởng của pha tạp lên sự phân bố của hạt tải trong giếng, xác định được các cơ chế tán xạ của hạt tải. Chúng tôi cũng chỉ ra ảnh hưởng của pha tạp bất đối xứng một phía lên sự phân bố của hạt tải phụ thuộc vào mức pha tạp và độ rộng kênh dẫn. Nhóm tác giả đã đưa ra một lý thuyết nghiên cứu về ảnh hưởng của hiệu ứng uốn cong vùng năng lượng do pha tạp một phía lên quá trình vận chuyển của hạt tải trong mô hình giếng lượng tử vuông góc pha tạp một phía. Lý thuyết của nhóm tác giả đã giải thích được một số thực nghiệm về hiện tượng vận chuyển của hạt tải trong giếng lượng tử pha tạp một phía ở nhiệt độ thấp mà trước đây chưa có lí thuyết nào giải thích được, như: sự phụ thuộc của độ linh động vào độ rộng của giếng.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] T. Ando, A. B. Fowler, and F. Stern (1982), Rev. Mod. Phys. 54, 437.

[2] R.M. Feenstra and M.A. Lutz (1995), J. Appl. Phys. 78, 6091.

[3] A. Gold (1987), Phys. Rev. B 35, 723.

[4] A. Gold (2008), J. Appl. Phys. 1033, 043718.

[5] T. Irisawa, M. Myronov, E. H. C. Parker, K. Nakagawa, M. Murata, S. Koh, and Y. Shiraki (2003), Appl. Phys. Lett. 82, 1425.

[6] M. J. Manfra, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin (2005), Appl. Phys. Lett. 86, 252105.

[7] D. N. Quang and N. H. Tung (2008), Phys. Rev. B 77, 125335.

[8] D. N, Quang, N. H. Tung, L. Tuan, D. T. Hien, and Tran Thi Hai (2008), *Key scattering mechanisms for holes in strained SiGe/Ge/SiGe square quantum wells*, Journal of Applied physics, 104, 113711

[9] D. N, Quang, N. H. Tung, L. Tuan, N. T. Hong, and T. T. Hai (2009), *Correlation-length dependence of lifetime ratios: Individual estimation of interface profile parameters*, Applied Physics Letters, 94, 072106.

[10] D.N. Quang, V.N. Tuoc, N.H. Tung, and T.D. Huan, Phys. Rev.

# BEND - BANDING EFFECTS ON TRANSPORT OF CARRIERS IN THE SINGLE SIDE DOPED SQUARE QUANTUM WELLS

**Nguyen Quyet Tien, Tran Thi Hai**

ABSTRACT

*The effect from single-side modulation doping on low-temperature transport properties of the charge carriers confined in a square infinite quantum well (QW) is given. With variational approach and the aid of our auxiliary functions, the expressions for the carrier distribution in single-side square QWs are obtained analytically. We obtained their roughness-induced scattering in the in-plane. We show that the impact of asymmetric modulation due to single-side doping on the carrier distribution depends on the doping level and channel width.*

**Keywords:** *Single-side doping, modulation doping, variational method, doping level, channel width.*

# DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG

**Lê Trần Tình[1], Mai Xuân Thảo[2], Nguyễn Thị Sâm[3]**

TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic không địa phương với số hạng khuếch tán phụ thuộc vào chuẩn $L^2$ của gradient. Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu toàn cục nhận được nhờ phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin. Chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm thông qua nghiên cứu sự tồn tại và tính trơn của tập hút toàn cục trong các cặp không gian. Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định mũ của nghiệm dừng.*

**Từ khóa:** *Phương trình parabolic không địa phương, nghiệm yếu, tập hút toàn cục.*

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong những năm qua, việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm thông qua nghiên cứu tập hút toàn cục nhận được sự quan tâm mạnh mẽ của nhiều tác giả đối với nhiều loại phương trình đạo hàm riêng [2, 10, 13, 15], đặc biệt, các phương trình parabolic liên kết với toán tử $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ [2, 6, 7, 10, 13]. Những năm gần đây, phương trình parabolic không địa phương đã được nghiên cứu rộng rãi.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic phi tuyến với phần tử khuếch tán không địa phương

$$\begin{cases} u_t - div(a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u) + f(u) = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập mở, bị chặn với biên $\partial\Omega$ liên tục Lipschitz, hàm phi tuyến $f$, hệ số khuyếch tán $a$ và ngoại lực $g$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(**H1**) $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ phụ thuộc vào chuẩn $H_0^1$ của $u$ nghĩa là $a = a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})$ thỏa mãn điều kiện:

*i*) $a$ là hàm bị chặn, tức là tồn tại hai hằng số dương $m$ và $M$ sao cho:

$$0 < m \le a(t) \le M, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

*ii*) $s \mapsto a(s^2)s$ không giảm. (1.3)

(**H2**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục thỏa mãn:

[1,2,3] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

$$c_1 |u|^q - c_0 \le f(u)u \le c_2 |u|^q + c_0, \tag{1.4}$$

$$f'(u) \ge -c_3, \tag{1.5}$$

với $q \ge 2$, và $c_0, c_1, c_2, c_3$ là các hằng số dương.

(**H3**) $g \in L^2(\Omega)$.

Ký hiệu:

$\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, $V := L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^q(\Omega_T)$, $V^* := L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) + L^{q'}(\Omega_T)$

trong đó $(q, q')$ là cặp đối ngẫu, nghĩa là $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Giả sử $u_0 \in L^2(\Omega)$.

**Định nghĩa 1.1.** *Một hàm u được gọi là một nghiệm yếu của* (1.1) *trên khoảng* $(0,T)$ *nếu* $u \in V, u_t \in V^*$, $u(x,0) = u_0$ *hầu khắp nơi trong* $\Omega$.

$$\int_{\Omega_T} \left( u_t v + a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \nabla u \nabla v + f(u)v - gv \right) dxdt = 0, \tag{1.6}$$

*với mọi hàm thử* $v \in V$.

Bởi vì, nếu $u \in V$ và $u_t \in V^*$, thì $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Điều này giải thích cho điều kiện đầu của bài toán (1.1) có nghĩa. Gọi $\lambda_1 > 0$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Bổ đề sau đây là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Holder, bất đẳng thức Young và phép nhúng compact $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$.

**Bổ đề 1.1.** *Giả sử* $u \in H_0^1(\Omega)$.

*Khi đó,* $\left| \int_\Omega gu dx \right| \le \varepsilon \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{4\varepsilon\lambda_1} \| g \|^2_{L^2(\Omega)}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Sử dụng phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin và bổ đề compact Aubin - Lions - Simon, ta có định lý sau:

**Định lý 1.1.** [7] *Giả sử các giả thiết* (**H1**), (**H2**) *và* (**H3**) *được thỏa mãn, với mọi* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *bài toán* (1.1) *có duy nhất nghiệm yếu toàn cục trên khoảng* $(0,T)$. *Hơn nữa, ánh xạ* $u_0 \mapsto u(t)$ *là liên tục trong* $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

Ý nghĩa của bài toán xuất phát từ ý nghĩa của các phần tử không địa phương và ứng dụng của toán tử Laplace trong các lĩnh vực khoa học. Các phần tử không địa phương có thể cho các kết quả chính xác hơn. Thí dụ, trong các hệ động lực dân số, hệ số khuyếch tán $a$ được giả thiết phụ thuộc vào tổng dân số toàn miền hơn là vào một mật độ địa phương. Để biết thêm chi tiết cũng như các dạng khác của các phần tử không địa phương, độc giả có thể xem các tài liệu tham khảo [3, 4, 5, 6, 8, 11, 14]. Tuy nhiên, sự xuất hiện của các phần tử không địa phương trong bài toán lại gây ra các khó khăn toán học khiến cho việc phân tích bài toán trở nên phức tạp hơn.

Bài báo có cấu trúc như sau. Trong mục 2, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của các tập hút toàn cục trong $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ thông qua các ước lượng tiên nghiệm trong $L^2(\Omega)$,

$H_0^1(\Omega)$ và tính compact của phép nhúng $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. Tuy nhiên, chúng tôi thực sự gặp khó khăn trong mục 3 khi chứng minh sự tồn tại của các tập hút toàn cục trong $(L^2(\Omega), L^q(\Omega))$ và $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$. Bởi với các giả thiết (**H1**), (**H2**), (**H3**) nghiệm của bài toán nằm trong $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, vì vậy chúng ta không có các phép nhúng compact tương ứng trong các trường hợp này để chứng minh tính compact tiệm cận cho nửa nhóm sinh ra từ bài toán (1.1). Để vượt qua những khó khăn này, chúng tôi khai thác hướng tiếp cận được sử dụng gần đây khi nghiên cứu các bài toán phương trình đạo hàm riêng được trình bày trong [13, 15]. Phần cuối được dành cho nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định mũ của nghiệm dừng.

*Các ký hiệu*: Chúng tôi sử dụng C để ký hiệu hằng số mà giá trị có thể thay đổi trong mỗi lần xuất hiện. $\Omega(u \geq M) := \{x \in \Omega : u(x) \geq M\}$ và $\Omega(u \leq -M) := \{x \in \Omega : u(x) \leq -M\}$. $\langle .,. \rangle$ dùng để ký hiệu cả tích vô hướng và tích đối ngẫu.

## 2. SỰ TỒN TẠI CỦA TẬP HÚT TOÀN CỤC

Nhờ Định lý 1.1, ta xây dựng được nửa nhóm liên tục $S(t) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ xác định bởi $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$ với $S(t)u_0$ là một nghiệm yếu toàn cục của (1.1) với điều kiện đầu $u_0$. Sau đây, chúng tôi chỉ đưa ra các tính toán cơ bản, các chứng minh chặt chẽ nhờ sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và Bổ đề 11.2 [10].

**Mệnh đề 2.1.** Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn $B_0$ trong $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

*Chứng minh:*

Nhân phương trình đầu tiên của bài toán (1.1) với $u$ và sử dụng tích phân từng phần, ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega f(u)u dx = \int_\Omega g u dx \tag{2.1}$$

Từ (1.2), (1.4) và Bổ đề 1.1, suy ra

$$\frac{d}{dt}\| u \|^2_{L^2(\Omega)} + m\lambda_1 \| u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2c_0 |\Omega| + \frac{1}{m\lambda_1} \| g \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có:

$$\| u(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} e^{-Ct} + R_0(1 - e^{-Ct}), \tag{2.2}$$

với $C = m\lambda_1, R_0 = 2c_0 |\Omega| + \frac{1}{m\lambda_1} \| g \|^2_{L^2(\Omega)}$. Bất đẳng thức (2.2) kéo theo $B_0 = B(\sqrt{\rho_0})$ với $\rho_0 = 2R_0$ là một tập hấp thụ bị chặn của $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ nằm trong cặp không gian $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$. Nghĩa là với mỗi tập $B$ trong $L^2(\Omega)$, đều tồn tại $T_0 = T_0(B)$ chỉ phụ thuộc duy nhất vào chuẩn $L^2$ của $B$ thỏa mãn, $\forall t \geq T_0$, $\forall u_0 \in B$.

$$\| S(t)u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} \le \rho_0. \tag{2.3}$$

**Mệnh đề 2.2.** *Nửa nhóm* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *có một tập hấp thụ bị chặn* $B_1$ *trong* $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$.

*Chứng minh.*

Nhân phương trình đầu tiên của bài toán (1.1) với $-\Delta u$, sử dụng tích phân từng phần, (1.2) và (1.5), ta thu được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + m\| \Delta u \|^2_{L^2(\Omega)} \le (\frac{1}{2}+c_3)\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - \langle g, \Delta u\rangle \tag{2.4}$$

Mặt khác,

$$(\frac{1}{2}+c_3)\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} - \langle g, \Delta u\rangle = -(\frac{1}{2}+c_3)\langle u, \Delta u\rangle - \langle g, \Delta u\rangle \le m\| \Delta u \|^2_{L^2(\Omega)} + C(\| g \|^2_{L^2(\Omega)} + \| u \|^2_{L^2(\Omega)}) \tag{2.5}$$

Từ (2.4), (2.5) và Mệnh đề 2.1, nếu $u_0 \in B_0$ thì

$$\frac{d}{dt}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} \le R_1 \text{ , với } R_1 > 0 \tag{2.6}$$

Vì $B_0$ hút bất kỳ tập con bị chặn của $L^2(\Omega)$ nên áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho (2.6) ta có $B_1 = B_{H_0^1(\Omega)}(\rho_1^{-2})$ với $\rho_1 = 2R_1$ là một tập hấp thụ bị chặn của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ trong $H_0^1(\Omega)$: Nghĩa là với bất kỳ tập $B$ nằm trong $L^2(\Omega)$, tồn tại $T_1 = T_1(B)$ chỉ phụ thuộc chuẩn $L^2$ của $B_0$ thỏa mãn, $\forall t \ge T_1$, $\forall u_0 \in B$,

$$\| S(t)u_0 \|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \rho_1 \tag{2.7}$$

Nhờ phép nhúng compact $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, Mệnh đề 2.1 và Mệnh đề 2.2, ta có định lý sau:

**Định lý 2.1.** *(Sự tồn tại của tập hút toàn cục trong* $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$*) Nếu các giả thiết* (**H1**), (**H2**) và (**H3**) *được thỏa mãn thì nửa nhóm* $S(t)$ *sinh bởi bài toán* (1.1) *có một tập hút toàn cục* $\mathcal{A}_2$ *trong* $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$.

## 3. TÍNH TRƠN CỦA TẬP HÚT TOÀN CỤC

Thực tế, chúng tôi muốn chứng minh sự tồn tại của một tập hút nằm trong $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega))$. Để giải quyết vấn đề này, chúng tôi sử dụng phương pháp được trình bày trong [13,15]. Trước tiên, chúng tôi giả thiết $a$ thỏa mãn điều kiện sau:

(**H1bis**) $a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})$ *khả vi liên tục, không giảm và thỏa mãn điều kiện* (**H1**).

**Mệnh đề 3.1.** *Nếu các điều kiện* (**H1bis**), (**H2**), (**H3**) *được thỏa mãn thì nửa nhóm* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *có một tập hấp thụ bị chặn* $B_2$ *trong* $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega))$.

*Chứng minh:*

Giả sử các điều kiện (**H1bis**), (**H2**), (**H3**) được thỏa mãn. Lấy tích phân phương trình (2.1) trên $[t,t+1]$ với $t \geq T_1$ và sử dụng (2.3), ta thu được

$$\int_t^{t+1}\left[a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega gudx\right]ds \leq \frac{\rho_0}{2}. \tag{3.1}$$

Đặt $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Từ (1.4) và (1.5) suy ra tồn tại các hằng số dương $c_5, c_6$ thỏa mãn:

$$c_5 | u |^q - c_6 \leq F(u) \leq uf(u) + \frac{c_3}{2} | u |^2 . \tag{3.2}$$

Do đó,
$$\int_\Omega F(u)dx \leq \int_\Omega f(u)udx + \frac{c_3\rho_0}{2}. \tag{3.3}$$

Từ (3.1) và (3.2) suy ra

$$\int_t^{t+1}\left[a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx\right]ds \leq \frac{\rho_0(c_3+1)}{2}. \tag{3.4}$$

Mặt khác nhân phương trình đầu tiên của (1.1) với $u_t$, ta thu được

$$\| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx\right]$$

$$= \frac{1}{2}a'(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} \frac{d}{dt} \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} . \tag{3.5}$$

Đặt: $L = \sup_{0\leq s\leq \rho_1} |a'(s)|$. Từ (2.6), (2.7) và (3.5) suy ra: Nếu $u_0 \in B_0$ thì:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx\right] \leq LR_1^2. \tag{3.6}$$

Do đó, từ (3.4) và (3.6), sử dụng bất đẳng thức Gronwall đều, ta có

$$\frac{1}{2}a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}) \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx \leq \frac{\rho_0(c_3+1) + 2LR_1^2}{2}. \tag{3.7}$$

Sử dụng (1.2), (1.4) và Bổ đề 1.1 ta rút ra từ (3.7) và (3.2), với mọi $t \geq T_2 = T_1 + 1$ và $u_0 \in B_0$, thì

$$\| u_n \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u_n \|^q_{L^q(\Omega)} \leq \rho_2 \tag{3.8}$$

Vậy nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp phụ bị chặn $B_2$.

**Mệnh đề 3.2.** *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là chuẩn yếu liên tục trên $S(B_2)$ với $B_2$ là một tập hấp thụ bị chặn nằm trong không gian $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ thu được từ Mệnh đề 3.1*

*Chứng minh:*

Chọn $Y = L^2(\Omega)$, $X = H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, kết luận sau thu được trực tiếp từ Định lý 3.2 [13].

**Định lý 3.1.** *(Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $(L^2(\Omega), L^q(\Omega))$) Giả sử các điều kiện* **(H1bis)**, **(H2)**, **(H3)** *được thỏa mãn. Khi đó nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ liên kết với bài toán* (1.1) *có một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_q$ trong $(L^2(\Omega), L^q(\Omega))$.*

*Chứng minh:*

Từ Mệnh đề 3.1, Định lý 2.1 và Định lý 2.6 [13], để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục $\mathcal{A}_q$, ta cần chứng minh rằng $\forall \varepsilon > 0$ và tập con bất kỳ bị chặn $B \subset L^2(\Omega)$ tồn tại hai hằng số dương $T = T(\varepsilon, B)$ và $M = M(\varepsilon)$ sao cho: $\int_{\Omega(|u|\geq M)} |u|^q < C\varepsilon$, $\forall u_0 \in B$ và $t \geq T$, trong đó hằng số $C$ không phụ thuộc $\varepsilon$ và $B$. Theo Bổ đề 2.4 [13]: $\forall \varepsilon > 0$ cố định, $\exists \delta > 0$, $T = T(B)$ và $M = M(\varepsilon)$ sao cho độ đo Lebesgue $|\Omega(|S(t)u_0| \geq M)| \leq \delta$, $\forall u_0 \in B$, $t \geq T$ và $\int_{\Omega(|S(t)u_0|\geq M)} |g|^2 < \varepsilon$. (3.9)

Nhân phương trình đầu tiên của (1.1) với $(u-M)_+^{q-1}$ ta được:

$$u_t(u-M)_+^{q-1} - a(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})\Delta u)(u-M)_+^{q-1} + f(u)(u-M)_+^{q-1} = g(x)(u-M)_+^{q-1}. \quad (3.10)$$

Trong đó $(u-M)_+$ là phần dương của $(u-M)$ nghĩa là

$$(u-M)_+ = \begin{cases} u-M & , \quad u \geq M, \\ 0 & , \quad u < M, \end{cases}$$

$M$ là một hằng số dương. Từ (1.4), với $u \geq M$ và $M$ đủ lớn, ta có $f(u) \geq c^* |u|^{q-1}$.

Do đó,

$$f(u)(u-M)_+^{q-1} \geq c^* |u|^{q-1} (u-M)_+^{q-1} = \frac{c^*}{2}|u|^{q-1}(u-M)_+^{q-1} + \frac{c^*}{2}|u|^{q-1}(u-M)_+^{q-1}$$

$$\geq \frac{c^*}{2}(u-M)_+^{2(q-1)} + \frac{c^*}{2}|u|^{q-2}(u-M)_+^q \geq \frac{c^*}{2}(u-M)_+^{2(q-1)} + \frac{c^*}{2}M^{q-2}(u-M)_+^q \quad (3.11)$$

Hơn nữa,

$$g(u-M)_+^{q-1} \leq \frac{c^*}{2}(u-M)_+^{2(q-1)} + \frac{|g|^2}{2c^*}. \quad (3.12)$$

Từ (3.10), (3.11) và (3.12) suy ra:

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\int_{\Omega(u\geq M)}(u-M)_+^q dx + (q-1)\int_{\Omega(u\geq M)} a(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})|\nabla u|^2 (u-M)_+^{q-2} dx$$

$$+ \frac{c^*}{2}M^{q-2}\int_{\Omega(u\geq M)}(u-M)_+^q dx \leq \frac{1}{2c^*}\int_{\Omega(u\geq M)}|g|^2\, dx.$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(u\geq M)}(u-M)_+^q dx+\frac{c^*}{2}qM^{q-2}\int_{\Omega(u\geq M)}(u-M)_+^q dx\leq\frac{q}{2\,c^*}\int_{\Omega(u\geq M)}|g|^2\,dx.$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\int_{\Omega(u\geq M)}(u-M)_+^q dx\leq\int_{\Omega(u\geq M)}(u(0)-M)_+^q dx\,e^{-\frac{c^*}{2}qM^{q-2}t}-\frac{q}{c^{*2}M^{(q-2)}}\int_{\Omega(u\geq M)}|g|^2\,dx\quad e^{-\frac{c^*}{2}qM^{q-2}t}$$

$$+\frac{q}{c^{*2}M^{(q-2)}}\int_{\Omega(u\geq M)}|g|^2\,dx.$$

Với $T$ và $M$ đủ lớn, kết hợp với (3.9) ta có

$$\int_{\Omega(u\geq M)}(u-M)_+^q dx<\varepsilon \tag{3.13}$$

Tương tự, lặp lại các bước trên với $(u+M)_-$ thay vì $(u-M)_+$ trong đó

$$(u+M)_-=\begin{cases}u+M & ,\quad u\leq -M\\ 0 & ,\quad u>-M\end{cases}$$

Ta cũng thu được: $\int_{\Omega(u\leq -M)}|(u+M)_-|^q\,dx<\varepsilon$ (3.14)

Từ (3.13) và (3.14), với $T$ và $M$ đủ lớn, suy ra: $\int_{\Omega(|u|\geq M)}(|u|-M)^q dx<\varepsilon$. Do đó,

$$\int_{\Omega(|u|\geq 2M)}|u|^q\,dx=\int_{\Omega(|u|\geq 2M)}|u-M+M|^q\,dx\leq 2^q\int_{\Omega(|u|\geq 2M)}(|u|-M)^q dx+2^q\int_{\Omega(|u|\geq 2M)}M^q dx$$

$$\leq 2^{q+1}\int_{\Omega(|u|\geq 2M)}(|u|-M)^q dx<C\varepsilon,$$

với $T$ và $M$ đủ lớn và $C$ không phụ thuộc $\varepsilon$ và $B$. Vậy, nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_q$ trong $(L^2(\Omega),L^q(\Omega))$.

**Bổ đề 3.3.** *Giả sử các điều kiện* **(H1bis)**, **(H2)**, **(H3)** *được thỏa mãn. Khi đó mọi tập con bị chặn B trong* $L^2(\Omega)$, *tồn tại số* $T_3=T_3(B)>0$ *sao cho* $\|u_t(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\rho_3,\ \forall u_0\in B,\forall s\geq T_3,$

*trong đó* $u_t(s)=\frac{d}{dt}(S(t)u_0)|_{t=s}$ *và* $\rho_3$ *là một hằng số dương không phụ thuộc* $u_0$.

*Chứng minh*

Lấy đạo hàm phương trình đầu của (1.1) theo thời gian, ký hiệu $v=u_t$

$$v_t-\mathrm{div}(a(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla v)-2\mathrm{div}\left(a'(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})(\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx)\nabla u\right)+f'(u)v=0. \tag{3.15}$$

Lấy tích vô hướng của phương trình trên với $v$, và sử dụng (1.5) ta thu được:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}+a(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})\int_\Omega\nabla v|^2\,dx+2a'(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)})(\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v dx)^2\leq c_3\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.16}$$

Do $a$ không giảm, (3.16) kéo theo

$$\frac{d}{dt}\| v \|^2_{L^2(\Omega)} \le 2c_3 \| v \|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.17}$$

Mặt khác từ (2.6), (3.4), (3.6) và (3.7) suy ra:

$$\int_t^{t+1} \| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} dx \le C \tag{3.18}$$

trong đó $C$ là hằng số dương và $t \ge T_2$. Kết hợp (3.17), (3.18) và áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều ta thu được: $\| u_t \|^2_{L^2(\Omega)} \le \rho_3$, $t \ge T_3 = T_2 + 1$ và $\rho_3$ là một hằng số dương.

**Định lí 3.2.** *Giả sử các điều kiện* (**H1bis**), (**H2**), (**H3**) *được thỏa mãn thì nửa nhóm* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *liên kết với bài toán* (1.1) *có một tập hút toàn cục* $\mathcal{A}$ *trong* $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$.

*Chứng minh*: Từ Định lý 4.7 [15], Mệnh đề 3.1 và Mệnh đề 3.2, chúng ta chỉ cần chứng minh nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ là compact tiệm cận trong không gian $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$. Để chứng minh điều này, chúng ta sẽ chứng minh $\{u_n(t_n)\}$ là một dãy Cauchy trong $H_0^1(\Omega)$. Ta có:

$$\langle a(|x|^2)x - a(|y|^2)y, x-y\rangle = \langle \int_0^1 \frac{d}{ds}\Big[a(|sx+(1-s)y|^2)\,|sx+(1-s)(sx+(1-s)y)\Big] ds, x-y\rangle$$

$$= |x-y|^2 \int_0^1 a(|sx+(1-s)y|^2)\,|sx+(1-s)y|\,ds + 2\int_0^1 a'(|sx+(1-s)y|^2)\langle (sx+(1-s)y), x-y\rangle|^2\, ds$$

$$\ge m|x-y|^2 \int_0^1 ds \ge m|x-y|^2.$$

Do đó, với $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ thì

$$\begin{aligned}
&\langle -(a(\| u_1 \|^2_{H_0^1(\Omega)})\Delta u_1 + (a(\| u_2 \|^2_{H_0^1(\Omega)})\Delta u_2), (u_1 - u_2)\rangle \\
&= \int_\Omega (a(\| u_1 \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u_1 + (a(\| u_2 \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u_2).\nabla(u_1 - u_2)dx \\
&\ge m \| u_1 - u_2 \|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Nhờ Định lý 2.1 và Định lý 3.1, chúng ta có thể giả sử $\{u_n(t_n)\}$ là một dãy Cauchy trong $L^2(\Omega)$ và $L^q(\Omega)$.

Từ (3.19) ta có:

$$m\| u_n(t_n) - u_m(t_m) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \langle -\frac{d}{dt}u_n(t_n) - f(u_n(t_n)) + \frac{d}{dt}u_m(t_m) + f(u_m(t_m)), u_n(t_n) - u_m(t_m)\rangle$$

$$\le \int_\Omega |\frac{d}{dt}u_n(t_n) - \frac{d}{dt}u_m(t_m)|\,|u_n(t_n) - u_m(t_m)|\,dx + \int_\Omega |f(u_n(t_n)) - f(u_m(t_m))|\,|u_n(t_n) - u_m(t_m)|\,dx$$

$$\le \| \frac{d}{dt}u_n(t_n) - \frac{d}{dt}u_m(t_m) \|_{L^2(\Omega)} \| u_n(t_n) - u_m(t_m) \|_{L^2(\Omega)} + \| f(u_n(t_n)) - f(u_m(t_m)) \|_{L^{q'}(\Omega)} \| u_n(t_n) - u_m(t_m) \|_{L^2(\Omega)}$$

Sử dụng Bổ đề 3.3 và tính bị chặn của $f(u_n(t_n))$ trong $L^{q'}(\Omega)$ suy ra $\{u_n(t_n)\}$ là dãy Cauchy trong $H_0^1(\Omega)$. Do đó nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là compact tiệm cận trong $(H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega))$.

## 4. SỰ TỒN TẠI VÀ ỔN ĐỊNH MŨ CỦA CÁC NGHIỆM DỪNG

**Định nghĩa 4.1.** *Phần tử $u^* \in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ được gọi là một nghiệm dừng của bài toán (1.1) nếu, với $\forall v \in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$,*

$$a(\| u^* \|^2_{H_0^1(\Omega)})\int_\Omega \nabla u^*.\nabla v dx + \int_\Omega f(u^*)v dx = \int_\Omega g v dx. \tag{4.1}$$

**Định lí 4.1.** *Giả sử các điều kiện* (**H1**), (**H2**), *và* (**H3**) *được thỏa mãn thì bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm dừng $u^*$ thỏa mãn*

$$\| u^* \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u^* \|^q_{L^q(\Omega)} \leq \ell, \tag{4.2}$$

*trong đó*

$$\ell = \frac{2m\lambda_1 c_0 |\Omega| + \| g \|^2_{L^2(\Omega)}}{4\min\{1, \frac{2c_1}{m}\}\lambda_1}. \text{ Hơn nữa nếu } (\mathbf{H1bis}) \text{ thỏa mãn và } c_3 < m\lambda_1 \tag{4.3}$$

*với $\lambda_1$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Thì nghiệm dừng của (1.1) là duy nhất và ổn định mũ.*

*Chứng minh.*

*i) Sự tồn tại* Lấy $u_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj} e_j$, trong đó $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ là một cơ sở của $H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$. Ký hiệu $V_n = \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Theo (4.1) ta có:

$$a(\| \nabla u_n \|^2_{H_0^1(\Omega)})\int_\Omega \nabla u_n.\nabla v dx + \int_\Omega f(u_n)v dx = \int_\Omega g v dx, \tag{4.4}$$

với mọi hàm thử $v \in V_n$.

Ta xây dựng toán tử sau $R_n : V_n \to V_n$ xác định bởi:

$$\langle R_n u, v\rangle = a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega f(u)v dx - \int_\Omega g v dx \ , \forall u, v \in V_n.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, Bổ đề 1.1, (1.2) và (1.4) suy ra:

$$\begin{aligned}\langle R_n u, u\rangle &= a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega f(u)u dx - \int_\Omega g u dx \\ &\geq \frac{m}{2}\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + c_1 \| u \|^q_{L^q(\Omega)} - c_0 |\Omega| - \frac{1}{2m\lambda_1}\| g \|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{m}{2}\Big[\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{2c_1}{m}\| u \|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{2m\lambda_1 c_0 |\Omega| + \| g \|^2_{L^2(\Omega)}}{4\lambda_1}\Big]\end{aligned}$$

$$\geq \frac{m}{2}\min\{1,\frac{2c_1}{m}\}\left[\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u \|^q_{L^q(\Omega)} - \ell\right], \quad (4.5)$$

$\forall 0 < \tau < m, u \in V_n$ và $\ell = \dfrac{2m\lambda_1 c_0 \,|\, \Omega \,| + \| g \|^2_{L^2(\Omega)}}{4\min\{1,\dfrac{2c_1}{m}\}\lambda_1}$. Từ (4.5) suy ra: $\langle R_n u, u\rangle \geq 0$, $\forall u \in V_n$ thỏa mãn: $\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u \|^q_{L^q(\Omega)} = \ell$.

Do đó nhờ một hệ quả của định lí điểm cố định Brouwer [12, Chapter 2, Lemma 1.4] suy ra : $\exists u_n \in V_n$ sao cho $R_n(u_n) = 0$ với $\| u_n \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| u_n \|^q_{L^q(\Omega)} \leq \ell.$ (4.6)

Do đó $\{u_n\}$ bị chặn trong $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Sử dụng tính compact của phép nhúng từ $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ vào $L^2(\Omega)$, ta có thể trích được một dãy con của $\{u_n\}$ (được ký hiệu tương tự) hội tụ yếu trong $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ và hội tụ mạnh trong $L^2(\Omega)$ tới phần tử $u^* \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Do đó, tồn tại một dãy con hội tụ hầu khắp nơi trong Ω. Hơn nữa, $f(u_n)$ bị chặn trong $L^{q'}(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ và $-(a(\| u_n \|^2_{H_0^1(\Omega)})\Delta u_n)$ bị chặn trong $H^{-1}(\Omega)$. Áp dụng thủ thuật chéo hóa và sử dụng Lemma 1.3 [9, p.12] và Theorem 4.18 [10, Chapter 4], ta có $f(u_n) \rightharpoonup f(u^*)$ trong $L^{q'}(\Omega)$ và $-(a(\| u_n \|^2_{H_0^1(\Omega)})\Delta u_n) \rightharpoonup -a(\| u^* \|^2_{H_0^1(\Omega)})\Delta u^*)$ trong $H^{-1}(\Omega)$. Do đó, $u^* \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ là một nghiệm dừng của bài toán (1.1). Bất đẳng thức (4.2) thu được trực tiếp từ (4.6) khi $n$ tiến ra vô cùng.

*ii) Sự duy nhất và ổn định mũ*: Đặt $w(t) = u(t) - u^*$, ta có

$$\int_\Omega w_t v dx + \int_\Omega \left(a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u - a(\| u^* \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u^*\right).\nabla v dx + \int_\Omega (f(u) - f(u^*))v dx = 0,$$

với mọi hàm thử $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

Đặc biệt, chọn $v = w$, ta có:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| w \|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \left(a(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u - a(\| u^* \|^2_{H_0^1(\Omega)})\nabla u^*\right).\nabla(u - u^*)dx$$
$$+ \int_\Omega (f(u) - f(u^*))(u - u^*)dx = 0.$$

Từ (4.3) và (3.19), suy ra $\dfrac{d}{dt}\| w \|^2_{L^2(\Omega)} + 2(m\lambda_1 - c_3)\| w \|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0.$ Áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho bất đẳng thức trên ta có $\| w(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| w(0) \|^2_{L^2(\Omega)} e^{-2(m\lambda_1 - c_3)t}$.

Do đó nghiệm dừng của (1.1) là duy nhất và ổn định mũ.

## 5. KẾT LUẬN

Bài báo đã phát biểu và trình bày hoàn chỉnh nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của một lớp phương trình parabolic tựa tuyến tính thông qua nghiên cứu sự tồn tại các tập

hút toàn cục. ngoài ra, bài báo còn trình bày sự tồn tại và ổn dịnh mũ của nghiệm dừng của bài toán.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] A.S.Ackleh and L.Ke (2000), *Existence-uniqueness and long time behavior for a class of nonlocal nonlinear parabolic evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 128, 3483-3492.

[2] C.T. Anh and T.D. Ke (2009), *Long-time behavior for quasilinear parabolic equations involving weighted $p$-Laplacian operators*, *Nonlinear Anal.* 71, 4415-4422.

[3] R.M.P. Almeida, S.N. Antontsev, J.C.M. Duque (2016), *On a nonlocal degenerate parabolic problem*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 27, 146-157.

[4] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos and P. Marín-Rubio (2016), *Robustness of nonautonomous attractors for a family of nonlocal reaction diffusion equations without uniqueness*, *Nonlinear Dynam.*84, 35-50.

[5] M. Chipot and B. Lovat (1997), *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal, 30, 4619-4627.

[6] M. Chipot, V. Valente and G.V. Caffarelli (2003), *Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110, 199-220.

[7] M. Chipot and T. Savitska (2014), *Nonlocal $p$-Laplace equations depending on the $L^p$-norm of the gradient*, Adv. Diff. Equa.19, 997-1020.

[8] F.J.S.A. Correa, S.D.B. Menezes, J. Ferreira (2004), *On a class of problems involving a nonlocal operator,* Appl. Math. Comp.147, 475-489.

[9] J.-L. Lions (1969), *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires*, Dunod, Paris.

[10] J.C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

[11] J. Simsen and J. Ferreiran (2014), *A global attractor for a nonlocal parabolic problem*, Nonlinear Stud. 21, 405-416.

[12] R. Temam (1979), *Navier - Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, 2nd edition, North - Holland, Amsterdam.

[13] M. Yang, C. Sun, and C. Zhong (2007), *Global attractors for $p$-Laplacian equation*, J. Math. Anal. Appl.327, 1130-1142.

[14] S. Zheng and M. Chipot (2005), *Asymptotic behavior of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms*, Asymptot. Anal.45, 301-312.

[15] C. K. Zhong, M. H. Yang, and C. Y. Sun (2006), *The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigoup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations, 15, 367-399.

# THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLOCAL PARABOLIC EQUATIONS

**Le Tran Tinh, Mai Xuan Thao, Nguyen Thi Sam**

ABSTRACT

*In this paper we consider a class of nonlinear nonlocal diffusion problems involving Laplacian operator where the nonlocal quantity is present in the diffusion coefficient which depends on-norm of the gradient and the nonlinear term satisfies a polynomial growth. By using Faedo - Galerkin method, we first prove the existence and uniqueness of weak solutions. Then we study the asymptotic behavior of solutions by investigating the existence and regularity of global attractors in various bi-spaces. Finally, we study the existence and exponential stability of the unique weak stationary solution to the problem.*

**Keywords:** *Nonlocal parabolic equations, weak solution, global attractors.*

**HONG DUC UNIVERSITY**

**JOURNAL OF SCIENCE**

**No 35 (10 - 2017)**

## CONTENT


| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | *Doan Thanh Canh* | Simulation and assessment of the transient stability of multi-generators power system | 5 |
| 2 | *Le Dinh Chac*<br>*Nguyen Thi Hien* | Method of filing and genetic generators of Kim Long species (*Anoectochilus Setaceus* Blume.) in Thanh Hoa | 11 |
| 3 | *Nguyen Manh Cuong*<br>*Mai Xuan Thao* | Approximate recovery of functions in Besov-type spaces with B-splines | 24 |
| 4 | *Trinh Dinh Dinh*<br>*Tran Thi Huyen*<br>*Tong Van Giang*<br>*Tran Thi Thao*<br>*Nguyen Duc Minh*<br>*Trinh Lan Hong* | Synthesis nano material of $NiO/Cr_2O_3/ZnO$ and its application for halogen derivative treatment | 36 |
| 5 | *Pham Thi Bich Ha*<br>*Le Xuan Dung* | Quotient modules preserves direct limits | 44 |
| 6 | *Le Van Hieu*<br>*Tran Thi Hai* | Key scattering mechanisms affecting mobility of carriers in the double-side doped square quantum wells | 53 |
| 7 | *Dinh Huy Hoang*<br>*Do Thi Thuy* | Some fixed point results in *B*-metric space | 62 |
| 8 | *Trinh Thi Hong* | A study on the affection of a number of factors to the genetic chitinase of the vegetation mushroom *Metarhizium* sp. distributed from insect remains in Thanh Hoa | 73 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | *Mai Thi Hong*<br>*Ngo Si Huy* | Evaluation of the specifications of reinforcing steels on the market | 80 |
| 10 | *Le Quang Huy*<br>*Hoang Thi Minh Nhan* | Some extended properties of the radical of ideals | 88 |
| 11 | *Nguyen Thi Nga*<br>*Pham Chi Cong* | Some absolute contraction and absolute neighborhood contraction properties in the class of compact metric spaces | 94 |
| 12 | *Nguyen Tuan Phuong*<br>*Le Viet Bau* | Influence of substitution Mg for Sr on magnetic property of the perovskite $La_{0.7}Sr_{0.3-x}Mg_xMnO_3$ | 101 |
| 13 | *Nguyen Huu Quang*<br>*Do Thi Tuyet*<br>*Le Thi Thanh Ha* | Some lie derivations properties of linear connections on algebras | 108 |
| 14 | *Le Van Quang* | The role of the Internet of things | 116 |
| 15 | *Le Thi Thanh Tam*<br>*Mai Thi Ngoc Hang*<br>*Mai Thi Hong*<br>*Nguyen Thi Mui* | The effects of coarse aggregate size and water content on the compressive strength and slump of normal concrete | 121 |
| 16 | *Hoang Van Thi*<br>*Nguyen Tien Da* | Initial operator and Taylor-Gontcharov expand | 129 |
| 17 | *Hoang Thi Huong Thuy*<br>*Vu Hong Nam* | Concentration range of acetic acid for Cr(III)- based conversion solutions | 139 |
| 18 | *Nguyen Quyet Tien*<br>*Tran Thi Hai* | Bend - banding effects on transport of carriers in the single-side doped square quantum wells | 146 |
| 19 | *Le Tran Tinh*<br>*Mai Xuan Thao*<br>*Nguyen Thi Sam* | The asymptotic behavior of solutions for a class of nonlocal parabolic equations | 155 |